Limiti e continuità – (III)

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Forme indeterminate

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

$+$ F.I. di tipo esponenziale

$$\infty^0, \qquad 0^0, \qquad 1^\infty$$

- Le F.I. esponenziali si riconducono alla F.I. prodotto $0 \cdot \infty$ in questo modo:

Le F.I. prodotto si riconducono a una F.I. quoziente

F.I. legate a funzioni polinomiali

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \right)$$

può dare luogo a una F.I. $\infty - \infty$, che trattiamo **raccogliendo il monomio in x di grado massimo**:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x^n \cdot \left(a_n + a_{n-1} x^{-1} + \ldots + a_1 x^{-n+1} + a_0 x^{-n} \right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n + 0 + \ldots + 0 = \pm\infty$$

F.I. legate a funzioni razionali fratte - I

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

dà luogo a F.I. $(\pm\infty)/(\pm\infty)$, che trattiamo **raccogliendo, sia al numeratore sia al denominatore, il monomio in x di grado MASSIMO**

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n \cdot \left(a_n + a_{n-1}x^{-1} + \ldots + a_1 x^{-n+1} + a_0 x^{-n}\right)}{x^m \cdot \left(b_m + b_{m-1}x^{-1} + \ldots + b_1 x^{-m+1} + b_0 x^{-m}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & n < m, \\ \frac{a_n}{b_m} & n = m, \\ \pm\infty & n > m \end{cases}$$

F.I. legate a funzioni razionali fratte - II

$$\lim_{x\to 0} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x}$$

dà luogo a F.I. 0/0, che trattiamo **raccogliendo, sia al numeratore sia al denominatore, il monomio in x di grado MINIMO**

Per esempio:

Confronti asintotici

Definizione

Siano $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$ (con I intorno di x_0, eventualmente privato di x_0), e $g(x) \neq 0$ per $x \in I \setminus \{x_0\}$. Diciamo che f è trascurabile rispetto a g $\underline{\text{per } x \to x_0}$, se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

e scriviamo

$$f(x) = o(g(x)) \quad \underline{\text{per } x \to x_0}.$$

N.B. È una nozione locale:

N.B. useremo il simbolo di o

- sia quando $f(x) \to \pm\infty$ & $g(x) \to \pm\infty$ (F.I. $\frac{\infty}{\infty}$)
- sia quando $f(x) \to 0$ & $g(x) \to 0$ (F.I. $\frac{0}{0}$)

Infinitesimi

Definizione

Siano $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ e $\underline{x_0 \in \overline{\mathbb{R}}}$ $\boxed{\text{punto di accumulazione}}$ per $\mathrm{dom}(f)$. Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0,$$

si dice che f è *infinitesima* per $x \to x_0$ e di scrive

$$\boxed{f(x) = o(1) \quad \text{per } x \to x_0}$$

Definizione

Siano $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$ (con I intorno di x_0, eventualmente privato di x_0), e $g(x) \neq 0$ per $x \in I \setminus \{x_0\}$. Supp. che

- f e g <u>entrambe infinitesime</u> per $x \to x_0$

Diciamo che f è un *infinitesimo di ordine superiore a* g <u>per $x \to x_0$</u>, se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$.

Esempi

$$x^4 = o(x^2) \quad \text{per } x \to 0,$$

$$x^3 = o(x^2) \quad \text{per } x \to 0,$$

$$\forall\, \alpha > 0 \;\forall\, \varepsilon > 0 \quad x^{\alpha} = o(e^{\varepsilon x}) \text{ per } x \to +\infty$$

$$\forall\,\alpha > 0\ \forall\,\varepsilon > 0 \quad e^{\varepsilon x} = o(|x|^{-\alpha}) \text{ per } x \to -\infty$$

$$\forall\,\alpha > 0\ \forall\,\varepsilon > 0 \quad (\ln(x))^{\alpha} = o(x^{\varepsilon}) \text{ per } x \to +\infty$$

$$\forall\, \alpha > 0\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad |\ln(x)|^{\alpha} = o(x^{-\varepsilon}) \text{ per } x \to 0^{+}$$

• La notazione

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

è *inscindibile*

• L'uguaglianza che compare nella notazione di o piccolo non ha le normali proprietà del simbolo di uguaglianza: per esempio

$$\big[f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0 \text{ e } h(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0\big]$$

$$\text{NON implica}$$

$$f(x) = h(x)$$

Si ha infatti che $x^4 = o(x^2)$ e $x^3 = o(x^2)$ per $x \to 0$, ma $x^4 \neq x^3$!

Algebra degli "o piccolo"

- $k \cdot o(f) = o(f)$ per $x \to x_0$
- $o(f) + o(f) = o(f)$ per $x \to x_0$
- $o(o(f)) = o(f)$ per $x \to x_0$
- $o(f + o(f)) = o(f)$ per $x \to x_0$
- $f \cdot o(g) = o(fg)$ per $x \to x_0$
- $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$ per $x \to x_0$
- $f = o(g) \Rightarrow \quad \dfrac{o(f)}{g} = o\left(\dfrac{f}{g}\right)$ per $x \to x_0$.

"Interpretazione dell'algebra degli "o piccolo". Bisogna leggere queste identitità come delle implicazioni da sinistra a destra.

Per esempio

$$o(f) + o(f) = o(f) \text{ per } x \to x_0$$

significa "se sommo due funzioni trascurabili rispetto a f, ottengo una funzione trascurabile rispetto a f", per esempio

$$x^4 + x^3 = o(x^2) + o(x^2) = o(x^2) \quad \text{per } x \to 0.$$

Definizione

Siano $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$ (con I intorno di x_0, eventualmente privato di x_0),

- f e g <u>infinitesime</u> per $x \to x_0$
- con $g(x) \neq 0 \; \forall \, x \in I \setminus \{x_0\}$

Diciamo che che f è un <u>infinitesimo dello stesso ordine</u> di g per $x \to x_0$, se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

e scriviamo $f \sim g$ per $x \to x_0$.

N.B. la definizione sulle dispense è leggermente più generale...

Limiti notevoli

$$\sin(x) \sim x \quad \text{per } x \to 0, \quad \text{infatti si ha} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,,$$

$$1 - \cos(x) \sim x^2 \quad \text{per } x \to 0, \quad \text{infatti si ha} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\,,$$

$$e^x - 1 \sim x \quad \text{per } x \to 0, \quad \text{infatti si ha} \quad l\mathrm{im}_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,,$$

$$\ln(1 + x) \sim x \quad \text{per } x \to 0, \quad \text{infatti si ha} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1\,,$$

$$\arctan(x) \sim x \quad \text{per } x \to 0, \quad \text{infatti si ha} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1\,.$$