Limiti e continuità - (IV)

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Funzioni continue

Il $\lim_{x \to x_0} f(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, non fornisce alcuna informazione sul comportamento di f in x_0.
Invece, la nozione di continuità stabilisce un legame fra $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $f(x_0)$

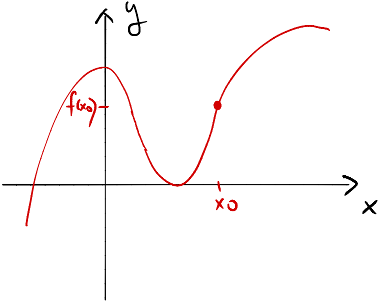
Definizione
Siano
$$f : D_f \to \mathbb{R} \text{ e } \boxed{x_0 \in \operatorname{dom} f.}$$
Diciamo che f è *CONTINUA in* $x_0 \in D_f$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ \forall\, x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \operatorname{dom} f \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Diciamo che $f : D_f \to \mathbb{R}$ è *CONTINUA su* D_f se f è continua in ogni punto di D_f.

- Per dare senso a questa definizione, deve essere $\boxed{x_0 \in D_f}$!!!

- **Significato "geometrico":**



f assume valori $f(x)$ **arbitrariamente vicini a** $f(x_0)$, pur di prendere x **sufficientemente vicino a** x_0

Confronto con la definizione di limite

Caratterizzazione della continuità tramite il limite

Teorema

Dati

$$f : D_f \to \mathbb{R} \text{ e } \boxed{x_0 \in D_f,}$$

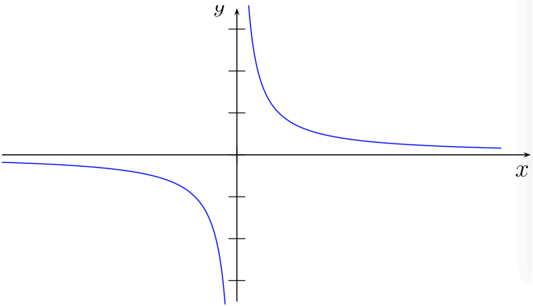
supponiamo che x_0 sia **un punto di accumulazione** per D_f.

Allora

$$f \text{ è continua in } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

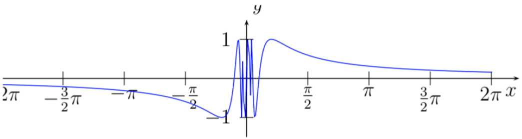
Esempio

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ è continua su } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



Esempio

$$f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ è continua su } \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



Osservazione

Dati

$$f : \operatorname{dom} f \to \mathbb{R} \text{ e } \boxed{x_0 \in \operatorname{dom} f,}$$

se x_0 è **un punto isolato** per $\operatorname{dom} f$, allora f <u>è continua in x_0</u>.

Continuità unilatera

Definizione

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D_f$ un punto di accumulazione per D_f. Diciamo che f è *continua a destra/sinistra in* x_0 se

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \text{o} \quad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)\,.$$

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, x_0 un punto interno a D_f. Allora

f è continua in x_0 se e solo se

f è <u>sia</u> continua a destra, <u>sia</u> continua a sinistra in x_0.

Continuità delle funzioni elementari

Le funzioni

$$f(x) = x^r, \qquad r \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= a^x, & a &\in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\\
f(x) &= \log_a(x), & a &\in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\\
f(x) &= \sin(x), \\
f(x) &= \cos(x), \\
f(x) &= \tan(x) \\
f(x) &= \arcsin(x), \\
f(x) &= \arccos(x), \\
f(x) &= \arctan(x)
\end{aligned}$$

sono continue in ogni punto del loro dominio.

Risultati teorici: I teoremi enunciati per i limiti di funzioni si estendono alla continuità di funzioni. In particolare:

Continuità e operazioni algebriche su funzioni

Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ continue in $\boxed{x_0 \in A}$. Allora,

1. le funzioni
$$f+g,\ f-g,\ f\cdot g \quad \text{sono continue in } x_0.$$
2. Se esiste un intorno I di x_0 tale che $g(x) \neq 0\ \forall\, x \in I$, allora
$$\frac{f}{g} \text{ è continua in } x_0.$$

- **Conseguenza:**
  - i **polinomi** sono funzioni continue in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$;
  - le **funzioni razionali fratte** sono continue in ogni punto del loro dominio.

Teorema

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$.

Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0) \in B$ allora $g \circ f$ è continua in x_0.

sulle dispense vi è una versione più generale....

- **Conseguenza:** Se $f : A \to \mathbb{R}$ è continua su A,

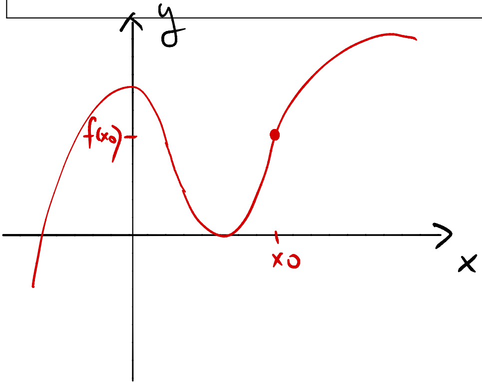
$$\sin f(x),\ \cos f(x),\ |f(x)|,\ a^{f(x)},\ \log_a f(x)(f(x) > 0), \cdots$$

sono anch'esse continue in A.

Teorema: Caratterizzazione della continuità tramite le successioni

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in D_f$ un punto di accumulazione per D_f. Allora f è continua in $x_0 \Leftrightarrow$

$$\forall \{x_n\} \subset D_f \quad \text{con} \quad x_n \to x_0 \quad \text{si ha} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$



Per dimostrare che una funzione f NON è continua in x_0: è sufficiente trovare una successione

$$\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f \text{ con } x_n \to x_0 \text{ e tale che}$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0).$$

Teorema di permanenza del segno

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, tale che

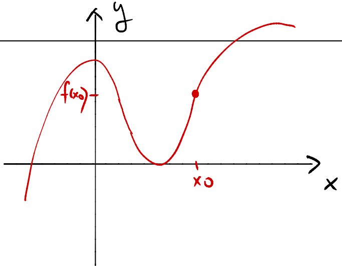
- f è continua in x_0
- $f(x_0) > 0$.

Allora, allora esiste un intorno I di x_0 tale che

$$f(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in I \cap D_f.$$

Analogamente, se $f(x_0) > L$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che

$$f(x) > L \quad \text{per ogni } x \in U \cap D_f.$$



NOTA BENE: diversamente dal teorema della permanenza del segno per i limiti, vale

$$f(x) > 0 \ \underline{\text{per ogni}}\ x \in I, \text{ e non solo in } I \setminus \{x_0\}!!!!$$

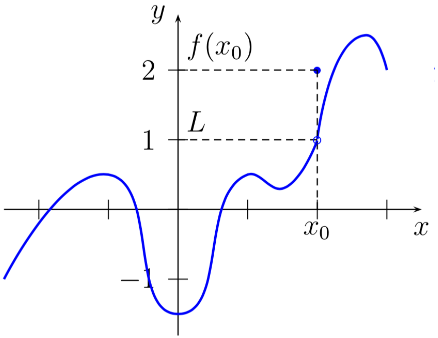
Infatti, la nozione di continuità in x_0 **impone un vincolo su** f in x_0

Punti di discontinuità

Classifichiamo i punti di discontinuità di una funzione f in queste 4 categorie:

- punti di discontinuità eliminabile;
- punti di infinito;
- punti di discontinuità di tipo salto;
- punti di discontinuità di seconda specie.

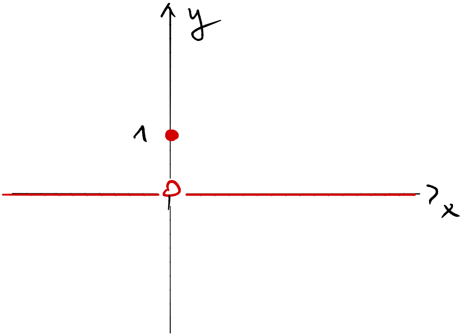
$\boxed{1}$ Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ con $L \neq f(x_0)$, allora si dice che la funzione f ha in x_0 un punto di *DISCONTINUITÀ ELIMINABILE in x_0*.



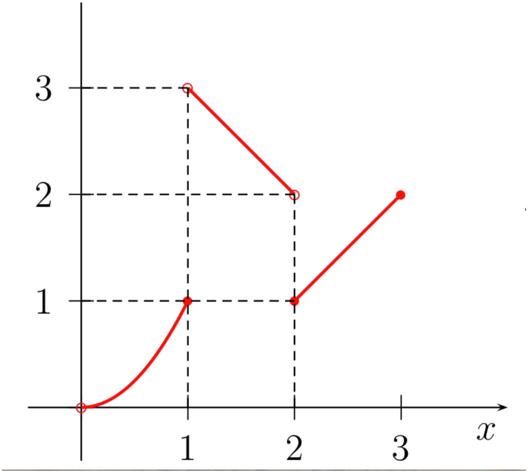
Esempio

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

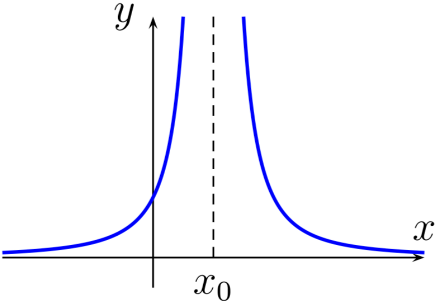
ha in $x_0 = 0$ una discontinuità eliminabile.



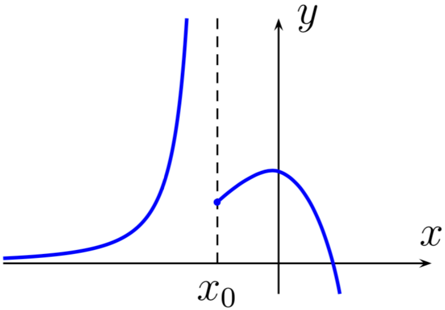
$\boxed{2}$ Se i *limiti destro* e *sinistro* esistono in $\mathbb{R}$ ma sono **differenti** si dice che x_0 è *PUNTO DI SALTO*.



$\boxed{3}$ Se *esistono i limiti destro e sinistro e (almeno) uno di questi è infinito* ($= +\infty$ *oppure* $= -\infty$), allora si dice che x_0 è un *PUNTO DI INFINITO*.



y
x
x_0



y
x
x_0

$\boxed{4}$ Se (almeno) <u>uno dei due</u> limiti destro o sinistro <u>non esiste</u>, allora si dice che x_0 è un punto di *DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE*.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$