Elementi di logica matematica

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Scopo: introdurre nozioni di logica & terminologia per una corretta interpretazione delle dimostrazioni.

Proposizione:

È frase di **senso compiuto**, della quale si può inequivocabilmente dire se è vera o falsa. Indichiamo le proposizioni con $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \dots$

Esempi:

1. $\mathcal{P}_1$: quest'aula contiene studenti di ingegneria
(**proposizione VERA**)
2. $\mathcal{P}_2$: Brescia è una città di mare
(**proposizione FALSA**)

N.B.: Una proposizione può essere VERA o FALSA, ma NON, contemporaneamente, vera e falsa

Predicato:

È una frase contenente una o più variabili libere, ad es.:

$\mathcal{P}(x)$ predicato dipendente da x

$\mathcal{Q}(x, y)$ predicato dipendente da x, y

Esempi:

1. $\mathcal{P}(x)$ = "L'intero x è un numero primo"

2. $\mathcal{Q}(x, y)$ = "Il numero x è maggiore di y "

I predicati NON hanno un valore di verità intrinseco: dipende dai valori attribuiti alle variabili libere. Per gli esempi 1 e 2 si ha

$\mathcal{P}(2)$ V

$\mathcal{P}(4)$ F

$\mathcal{Q}(3, \frac{7}{2})$ F

$\mathcal{Q}(2, \frac{1}{5})$ V

Quantificatori: elementi fondamentali del linguaggio matematico.

- $\forall$ quantificatore universale: “per ogni”
- $\exists$ quantificatore esistenziale: “esiste”
- $\exists!$ quantificatore esiste unico: “esiste uno e uno solo”.

- Un modo per trasformare predicati in proposizioni è l'uso di uno dei quantificatori.

Esempio

Dal predicato

$$\mathcal{P}(x) = \text{"nel luogo } x \text{ piove"}$$

otteniamo le due proposizioni:

1. *Piove in ogni luogo:* $\forall x : \mathcal{P}(x)$
2. *Esiste un luogo in cui piove:* $\exists x : \mathcal{P}(x)$

- Quando un predicato dipende da più variabili i quantificatori possono essere mescolati.

MAI invertire l'ordine dei quantificatori in una proposizione!
Può alterare il senso!

Esempio

$Q(x, y)$ = "nel luogo x piove nel giorno y "

Allora:

1. *In ogni luogo c'è almeno un giorno in cui piove:*

$$\forall x \exists y : Q(x, y) \quad (\text{prop. VERA})$$

2. *Esiste un giorno in cui piove in ogni luogo:*

$$\exists y \forall x : Q(x, y) \quad (\text{prop. FALSA})$$

Connettivi logici

Sono operatori che trasformano una o più proposizioni in altre proposizioni, il cui valore di verità dipende dai valori di verità delle proposizioni di partenza.

non (NEGAZIONE)

Trasforma $\mathcal{P}$ nella proposizione **non**($\mathcal{P}$) che ha valore di verità **contrario** a $\mathcal{P}$.

- L'operatore di negazione, applicato due volte, si elide,

$$\mathbf{non(non(\mathcal{P}))} = \mathcal{P}$$

e (CONGIUNZIONE) $\wedge$

Date $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}e\mathcal{Q}$ è la proposizione nella quale valgono sia la prima, sia la seconda.

- ▶ $\mathcal{P}e\mathcal{Q}$ è vera unicamente se sia $\mathcal{P}$ sia $\mathcal{Q}$ sono vere.

o (DISGIUNZIONE) $\vee$

Date $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}o\mathcal{Q}$ è la proposizione nella quale vale almeno delle due.

- ▶ Quindi, $\mathcal{P}o\mathcal{Q}$ è vera se almeno una fra $\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$ è vera.
- ▶ Scrivendo $\mathcal{P}o\mathcal{Q}$, non escludo che siano vere entrambe.

Esempio

$\mathcal{P}$: "3 è un numero pari" FALSA

$\mathcal{Q}$: "4 non è un numero primo" VERA

$\Rightarrow$ (IMPLICAZIONE)

Date $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, il connettivo $\Rightarrow$ crea la proposizione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, che si legge

- ▶ $\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$
- ▶ se $\mathcal{P}$, allora $\mathcal{Q}$

Terminologia alternative per $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$:

- ▶ $\mathcal{P}$ è **condizione sufficiente** per $\mathcal{Q}$
- ▶ $\mathcal{Q}$ è **condizione necessaria** per $\mathcal{P}$

N.B.:

$[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}]$ equivale a $[\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P}]$

Esempio

- ▶ $\mathcal{P}$: “Fido è un cane”
- ▶ $\mathcal{Q}$: “Fido è un mammifero”

$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$: “**Se** Fido è un cane **allora** è un mammifero”

Con la Terminologia alternativa:

- ▶ $\mathcal{P}$ è condizione SUFFICIENTE per $\mathcal{Q}$: l'essere un cane basta per essere un mammifero.
- ▶ $\mathcal{Q}$ è condizione NECESSARIA per $\mathcal{P}$: l'essere mammifero è un requisito indispensabile per essere cane, ovvero **se** Fido non è un mammifero **allora** non può essere un cane.

$\Leftrightarrow$ (DOPPIA IMPLICAZIONE)

Date $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, il connettivo $\Leftrightarrow$ crea la proposizione

$$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q} = (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \text{ e } \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$$

Si legge:

- ▶ $\mathcal{P}$ equivale a $\mathcal{Q}$
- ▶ $\mathcal{P}$ è **condizione necessaria e sufficiente** per $\mathcal{Q}$
- ▶ $\mathcal{P}$ se e solo se $\mathcal{Q}$

N.B.:

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \Leftrightarrow \text{non}(\mathcal{Q}) \Rightarrow \text{non}(\mathcal{P})$$

Negare proposizioni (predicati) contenenti connettivi

$$\mathbf{non}(\mathcal{P} \mathbf{e} \mathcal{Q}) = \mathbf{non}(\mathcal{P}) \mathbf{o} \mathbf{non}(\mathcal{Q})$$

$$\mathbf{non}(\mathcal{P} \mathbf{o} \mathcal{Q}) = \mathbf{non}(\mathcal{P}) \mathbf{e} \mathbf{non}(\mathcal{Q})$$

Negare $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$:

Significa negare che $\mathcal{Q}$ sia indispensabile per la validità di $\mathcal{P}$, ovvero significa affermare che $\mathcal{P}$ può valere (essere vera) quando non vale $\mathcal{Q}$, cioè:

$$[\text{non } (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})] \quad \Leftrightarrow \quad [\mathcal{P} \text{ e } (\text{non } \mathcal{Q})]$$

Negare proposizioni contenenti quantificatori

non($\forall$) equivale a $\exists$ **non**

cioè

non($\forall x, \mathcal{P}(x)$) $\Leftrightarrow$

“non è vero che $\mathcal{P}(x)$ è vera per ogni x ” $\Leftrightarrow$

“c'è almeno un x per il quale $\mathcal{P}(x)$ è falsa” $\Leftrightarrow$

$\exists x : \mathbf{non}(\mathcal{P}(x))$

Per negare che una proprietà sia verificata universalmente bisogna esibire un esempio in cui essa non sia verificata: un **controesempio**.

Negare proposizioni contenenti quantificatori

non($\exists$) equivale a $\forall$ **non**

non($\exists x : \mathcal{P}(x)$) $\Leftrightarrow$

“non è vero che esiste un x per cui $\mathcal{P}(x)$ è vera” $\Leftrightarrow$

“per ogni x , $\mathcal{P}(x)$ è falsa” $\Leftrightarrow$

$\forall x : \mathbf{non}(\mathcal{P}(x))$

Teoremi

Un teorema è costituito da un **enunciato** e da una **dimostrazione**.

- ▶ L'**enunciato** ha
 1. una IPOTESI ($\mathcal{P}$, il punto di partenza)
 2. una TESI ($\mathcal{Q}$ l'obiettivo da dimostrare)

Si sintetizza con

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$$

- ▶ **Dimostrazione:** procedimento logico per dedurre la tesi dall'ipotesi.

- **Dimostrazione per assurdo:** si vuole provare che

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & & \mathcal{Q} \\ \text{Ipotesi} & \Rightarrow & \text{Tesi} \end{array}$$

L'equivalenza

$$[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}] \quad \Leftrightarrow \quad [\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P}]$$

viene utilizzata nella dimostrazione per assurdo: si parte dalla negazione della tesi e si cerca di arrivare (tramite un processo deduttivo) alla negazione dell'ipotesi (il che è un assurdo, perchè l'ipotesi $\mathcal{P}$ è vera!). Dunque la negazione della tesi è falsa. Allora la tesi è vera.