Insiemi numerici: dai naturali ai razionali

Riccarda Rossi

Università di Brescia

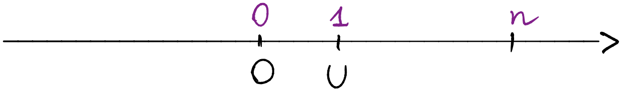
Analisi I

I numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$$ è l'insieme dei numeri naturali.

N.B.: 0 è un numero naturale!!!!!!!

- $\mathbb{N}$ si può rappresentare su una retta



- Un numero naturale n è detto *primo* se i suoi unici divisori sono 1 e n.

- Su $\mathbb{N}$ definite operazioni di somma $+$ e prodotto $\cdot$, **interne** a $\mathbb{N}$:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$$

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N}$$

per le quali valgono le proprietà

commutativa: $n_1 + n_2 = n_2 + n_1, \quad n_1 \cdot n_2 = n_2 \cdot n_1$

associativa: $(n_1 + n_2) + n_3 = n_1 + (n_2 + n_3)$

$$(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)$$

distributiva: $n_1 \cdot (n_2 + n_3) = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3$

Sommatoria

Siano

$I \subset \mathbb{N}$: insieme finito di indici

$(a_i)_{i \in I}$ famiglia finita di numeri (**reali**), al variare di i in I

Con il simbolo

$$\sum_{i \in I} a_i$$

indichiamo la somma di tutti i numeri a_i, al variare di i in I.

- **Esempio:** se

$$I = \{1, 2, 3\} \text{ e } a_i = 2^{2i},$$

Osservazione importante

Ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ **ha in** $\mathbb{N}$ il suo **successore**, cioè il primo (il più piccolo) numero naturale maggiore di n.

$$\begin{array}{lcl} 1 & \to & 2 = 1 + 1 \\ 2 & \to & 3 = 2 + 1 \\ \dots & & \\ n & \to & n + 1 \\ \dots & & \end{array}$$

♣ A partire da 1 si ottengono tutti i numeri naturali con somme successive

$$2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1, \quad \dots$$

Questo si formalizza correttamente tramite il **principio di induzione**

Assioma: Principio di induzione

Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}$ *un insieme che verifica le seguenti proprietà:*

1. $0 \in \mathcal{S}$;
2. $\forall\, n \in \mathcal{S} \Rightarrow n+1 \in \mathcal{S}$.

Allora $\mathcal{S} = \mathbb{N}$.

Cioè:

cioè $\mathbb{N}$ è il più piccolo sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ contenente 0 e tale che

$$(\forall\, n,\ (n \in \mathcal{S} \ \Rightarrow\ n+1 \in \mathcal{S}))$$

Forma equivalente del principio di induzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato. Supponiamo che valgano le seguenti proprietà:

1. $\mathcal{P}(0)$ *è vera;*
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- Usato per dimostrare teoremi validi per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ricetta per dimostrare che $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$

1

2

N.B.: al punto 2., non dimostrare che $\mathcal{P}(n+1)$ è vera, ma che $\mathcal{P}(n+1)$ è deducibile da $\mathcal{P}(n)$

"cioè si dimostra un teorema con ipotesi: $\mathcal{P}(n)$ e tesi: $\mathcal{P}(n+1)$ nel teorema"

Esempio 1.

Dimostrare che

$$2^n > n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Esempio 2. – Disuguaglianza di Bernoulli

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Il principio di induzione può essere formulato

- partendo da un $n_0 > 0$ al posto di 0
- dimostrando $\mathcal{P}(n)$ per ogni $n \in \{n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\}$ anziché per ogni $n \in \mathbb{N}$:

cioè:

Se

1. $\mathcal{P}(n_0)$ *è vera;*
2. $\forall n \geq n_0,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$,

allora $\mathcal{P}(n)$ *è vera per ogni* $n \geq n_0$*.*

Esempio 3.

Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall\, n \geq 1.$$

Come conseguenza del principio di induzione, si può dimostrare il

Principio del minimo intero:

Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ *ha minimo.*

- Questa proprietà
  - viene anche detta "del buon ordinamento" di $\mathbb{N}$
  - è FALSA per $\mathbb{R}$: è falso (!!!!) che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ abbia minimo

- Ricordiamo che una successione è una funzione avente come dominio $\mathbb{N}$ (o $\mathbb{N}$ privato di un numero finito di elementi)

$$f : \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

- Si denotano le successioni tramite il loro insieme immagine

$$\mathrm{im}(f) := \{f(n), :\ n \in \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{N}\}$$

e si scrive $\{a_n\}$ al posto di $\{f(n)\} = \mathrm{im}(f)$.

- Alcune successioni possono essere definite rigorosamente tramite il principio di induzione:
  - si definisce a_0
  - si dà il procedimento per definire a_{n+1} una volta noto a_n

Fattoriale di n

$$0! = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

Per esempio:

$$1! = 1,$$

Coefficienti binomiali

Siano $k, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. Allora:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Se $k > n$ si pone, per definizione, $\binom{n}{k} = 0$.

Per esempio:

$$\binom{n}{n} =$$

$$\binom{n}{0} =$$

$$\binom{n}{1} =$$

$$\binom{0}{0} =$$

$$\dots$$

- Valgono le seguenti relazioni:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Per noi la motivazione per i coefficienti binomiali è legata alla **Formula del Binomio di Newton:** *Per ogni* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *la potenza n-esima del binomio* $(a+b)$ *è data da*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Usiamo la convenzione che $0^0 = 1$*.*

I numeri interi

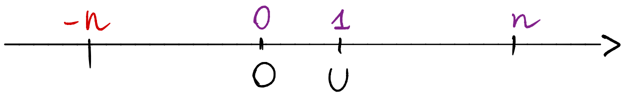
Indichiamo con

$$\mathbb{Z} = \{\cdots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

l'insieme dei numeri *interi (relativi)*.

La somma, il prodotto **e la sottrazione** sono operazioni interne a $\mathbb{Z}$.

- $\mathbb{Z}$ si può rappresentare su una retta



- Chiaramente, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

I numeri razionali

Indichiamo con

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

l'insieme dei numeri razionali.
Sono operazioni interne a $\mathbb{Q}$ la somma il prodotto, la sottrazione **e la divisione per un numero razionale non nullo**.

- $\mathbb{Z}$ può essere **identificato** con

  e quindi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Rappresentazione (o allineamento) decimale di un numero $x \in \mathbb{Q}$

$$x = \pm \Big(c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + c_1 10 + c_0$$
$$+ c_{-1} 10^{-1} + c_{-2} 10^{-2} + \ldots \Big)$$
$$\text{con } c_i,\ c_{-j} \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

c_i, c_{-j} son dette *cifre decimali*. Equivalentemente, si scrive

$$x = \pm c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0, c_{-1} c_{-2} \ldots$$

Il numero di cifre a sinistra della virgola è finito, mentre in generale vi possono essere infinite cifre decimali a destra della virgola.

Definizione

Una rappresentazione decimale si dice

- *limitata* se vi è un numero finito di cifre a destra della virgola. Ad es.

$$13 = 1 \cdot 10 + 3 =$$

$$\frac{18723}{100} = 187,23 =$$

- *illimitata* se vi è un numero INfinito di cifre a destra della virgola. Ad es.

$$-\frac{1}{6} = -0,166666666\dots$$

$$=$$

Se, in una rappresentazione decimale illimitata, da una certa posizione decimale in poi un blocco di cifre si ripete indefinitamente, allora la rappresentazione viene detta periodica e tale blocco è detto *periodo*. Ad esempio, $-1/6$ ha un allineamento decimale periodico di periodo 6.

Rappresentazione decimale dei razionali

Si dimostra che

Ad ogni numero razionale $x \in \mathbb{Q}$
è associata una e una sola rappresentazione decimale,
limitata o illimitata e periodica

Ordinamento di $\mathbb{Q}$

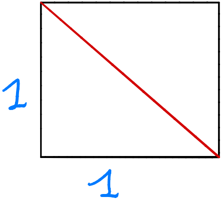
Su $\mathbb{Q}$ è definita relazione d'ordine $\leq$,

tale che

- $(\mathbb{Q}, \leq)$ è **totalmente ordinato**: due numeri razionali si possono sempre confrontare
- $(\mathbb{Q}, \leq)$ **NON** è **ben ordinato**: falso che ogni sottoinsieme non vuoto ha minimo. Per esempio non esiste il più piccolo numero razionale maggiore di zero.

Dai razionali ai reali

- Pitagorici: lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 è $\sqrt{2}$ che non è un numero razionale



- L'equazione

$$x^2 - 2 = 0$$

  non ha soluzioni $x \in \mathbb{Q}$.

Teorema

Se un numero x soddisfa $x^2 = 2$, allora x non è razionale.

Definizione di numero reale

Chiamiamo *numero reale*

un (qualsiasi) allineamento decimale

e denotiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali.

- I numeri razionali (=allineamenti decimali <u>limitati</u> o <u>illimitati & periodici</u>) appartengono a $\mathbb{R}$, quindi

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- Chiamiamo *numero irrazionale* un numero reale non razionale (=allineamento decimale illimitato non periodico) e denotiamo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri irrazionali.

- Per es.,

$$\pm\sqrt{2},\ \pi,\ e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

con e costante di Nepero (approssimata con 55 cifre decimali):

$$e = 2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749\ldots$$

Descriveremo $\mathbb{R}$ a partire da proprietà fondamentali che accettiamo per vere (=ASSIOMI) sulla sua struttura algebrica, e cioè

$\mathbb{R}$ è un CAMPO ORDINATO COMPLETO