Insiemi numerici: i numeri reali

CAP. 4

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

$\mathbb{R}$ è un CAMPO ORDINATO COMPLETO

- comprendere questa affermazione
- dedurne imporanti proprietà di $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è un **CAMPO**

$\mathbb{R}$ è dotato delle operazioni di **somma** e **prodotto**, interne, con le seguenti proprietà:

- *Operazione di SOMMA* $= + : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (a, b) \longmapsto a+b$

$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad a + b = b + a$

(+ è commutativa)

$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \qquad (a + b) + c = a + (b + c)$

(+ è associativa)

$\exists 0 \in \mathbb{R} \;:\; \forall a \in \mathbb{R} \qquad a + 0 = 0 + a = a$

($0 =$ elem. neutro di $+$)

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists! -a \in \mathbb{R} \;:\; \quad a + (-a) = (-a) + a = 0$

($-a =$ opposto di a)

$\mathbb{R}$ è un CAMPO

- *Operazione di PRODOTTO* $= \cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b = b \cdot a$ ($\cdot$ è commutativa)
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\cdot$ è associativa
$\exists\, 1 \in \mathbb{R} \ : \ \forall a \in \mathbb{R}$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ($1 =$ elemento neutro di $\cdot$)
$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists! a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ :$	$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ ($a^{-1} =$ reciproco di a risp. a $\cdot$)

- La somma e il prodotto godono della *proprietà distributiva:*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

La relazione d'ordine su $\mathbb{R}$

La relazione $\leq$ su $\mathbb{R}$ è definita sulle dispense a partire dalla def. di numero reale = allineam. decimale (qualsiasi)

$\mathbb{R}$ è dotato di una **relazione d'ordine totale** $\leq$

$\leq$ ha le proprietà di

riflessività $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x$

antisimmetria $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad [x \leq y \text{ e } y \leq x] \implies x = y$

transitività $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad [x \leq y \text{ e } y \leq z] \implies x \leq z$

dicotomia $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \leq y \quad \text{o} \quad y \leq x$

quindi $\leq$ è relazione d'ordine TOTALE

$\mathbb{R}$ è un CAMPO ORDINATO

Valgono delle "proprietà di compatibilità" fra le operazioni di somma e prodotto e la relazione d'ordine $\leq$.

Rispetto alle operazioni di campo $+$ e $\cdot$, $\leq$ gode delle seguente proprietà:

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c$,
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se $a \leq b$ e $\begin{cases} c > 0 \\ c = 0 \\ c < 0 \end{cases}$ allora $\begin{cases} a \cdot c \leq b \cdot c \\ a \cdot 0 = 0 = b \cdot 0 \\ a \cdot c \geq b \cdot c. \end{cases}$

Valore assoluto

A partire da $\leq$ su $\mathbb{R}$, definiamo il *valore assoluto* (o *modulo*) di un numero $a \in \mathbb{R}$: è il numero

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Si ha $\forall\, a,\ b \in \mathbb{R}$

- $|a| \geq 0$;
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (*disuguaglianza triangolare*)

La disuguaglianza può essere stretta: $a=2$, $b=-5$

$|a+b| = |-3| = 3$ $\qquad$ $3 < 7$!

$|a| + |b| = 2+5 = 7$

Che significa

$$|x - x_0| \leq R$$

(con $R \geq 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, dati)

$$\Updownarrow$$

$$-R \leq x - x_0 \leq R$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x - x_0 \leq R \\ x - x_0 \geq -R \end{cases}$$

Dimostriamo quindi

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ $$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} |a|-|b| \leq |a-b| & (1) \\ |a|-|b| \geq -|a-b| & (2) \end{cases}$$

dobbiamo dimostrare che valgono contemporaneamente. (Es: dimostrare (2))

$$(1) \iff |a| \leq |a-b| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

dim

disuguaglianza triangolare

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b| \qquad \boxtimes$$

$$|x+y| \leq |x|+|y| \quad \forall x, y$$

$$|x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |-y|$$
$$= |x| + |y|$$

Notare che

- $||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (FACILE DIMOSTR)

Da ricordare a vita:

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$\sqrt{25} = \sqrt{(-5)^2} \neq \cancel{-5} = 5 = |-5|$

Finora: $\mathbb{R}$ campo ordinato. Questi assiomi non descrivono completamente $\mathbb{R}$: manca

l'assioma di completezza di $\mathbb{R}$

Proprietà intrinseca a $\mathbb{R}$, fondamentale per l'analisi.

$\mathbb{Q}$ è un campo ordinato NON completo.

♣ Per descriverla, servono definizioni preliminari..

Maggioranti e minoranti

Siano

$$A \subseteq \mathbb{R}, \qquad \boxed{A \neq \emptyset} \qquad M, m \in \mathbb{R}.$$

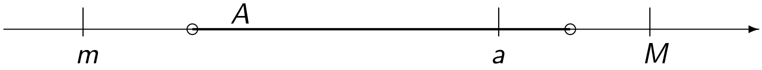
Diciamo che

- M è un **maggiorante** per A se

$$\forall a \in A \quad a \leq M.$$

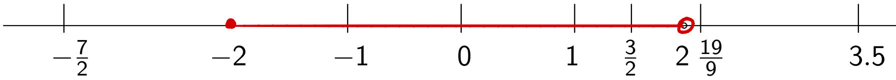
- m è un **minorante** per A se

$$\forall a \in A \quad m \leq a.$$



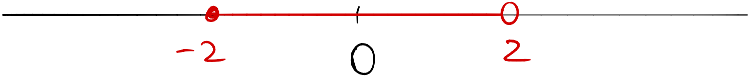
Esempio 1

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ -2 \leq x < 2\}$$



- $2, \dfrac{19}{9}, 3.5, \sqrt{26}, 150$ sono maggioranti per A.
- $-\sqrt{41}, -\dfrac{7}{2}$ sono minoranti per A.
- -1, 0, 1, $\dfrac{3}{2}$ non sono nè maggioranti nè minoranti per A.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \; -2 \leq x < 2\}$$



- L'insieme dei maggioranti per A è
$$M(A) = \{x \in \mathbb{R} : \; x \geq 2\}.$$
- L'insieme dei minoranti per A è
$$m(A) = \{x \in \mathbb{R} : \; x \leq -2\}.$$

Osservazione: nella def. di magg./min. **non si richiede** che il magg./min. appartenga all'insieme.

-2 è minorante, $-2 \in A$ ma

2 è maggiorante, $2 \notin A$

Esempio 2

Sia

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \; x \leq e\}$$

- L'insieme dei maggioranti per A è

$M(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq e\}$

- L'insieme dei minoranti per A è

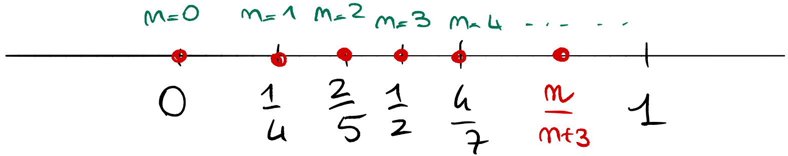
$m(A) = \emptyset$

Esempio 3

Sia

è un insieme infinito

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{n}{n+3}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$



• L'insieme dei suoi minoranti è

$$m(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \}$$

in particolare, 0 è minorante $\in A$

• L'insieme dei suoi maggioranti è

$$M(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \}$$

<u>Infatti</u>: $\supseteq$

1) è facile vedere che

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \frac{n}{n+3} \leq 1$$

Quindi ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \geq 1$ soddisfa

$$\frac{n}{n+3} \leq x \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ x è un maggiorante per A : vale $\supseteq$

2) Dimostro che $\quad M(A) \subseteq \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 1\}$

ovvero, ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x < 1$ NON è un maggiorante. Cioè $x < 1$ nega la definizione di maggiorante:

$$\text{non} \left[\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n}{n+3} \leq x \right], \text{ cioè}$$

$$\exists\ \bar{m} \in \mathbb{N} : \frac{\bar{m}}{\bar{m}+3} > x$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{m} > (\bar{m}+3)\,x \iff \bar{m}\,(1-x) > 3x$$

$$\Updownarrow \quad \to 1-x>0$$

$$\bar{m} > \frac{3x}{1-x}$$

In ultima analisi, devo vedere che $\forall x < 1 \ \exists\ \bar{m} \in \mathbb{N}$:

$$\bar{m} > \frac{3x}{1-x}$$

Vera grazie alla proprietà di Archimede

$$\Rightarrow M(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \}$$

Insiemi superiormente e inferiormente limitati

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si dice che

- A è *superiormente limitato* se esiste almeno un *maggiorante* M per A, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R}: \quad \forall a \in A \quad a \leq M.$$

- A è *inferiormente limitato* se esiste almeno un *minorante* m per A, cioè

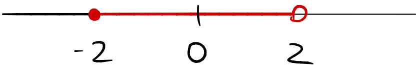
$$\exists m \in \mathbb{R}: \quad \forall a \in A \quad a \geq m.$$

- A è *limitato* se A è sia inferiormente limitato sia superiormente limitato, cioè

$$\exists m, M \in \mathbb{R}: \quad \forall a \in A \quad m \leq a \leq M.$$

Riprendiamo gli esempi precedenti..

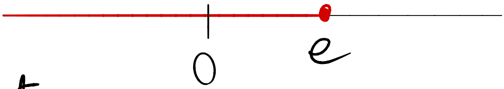
1. $\{x \in \mathbb{R} : \; -2 \le x < 2\}$



è superiorm. e inf. limitato

$\Rightarrow$ limitato

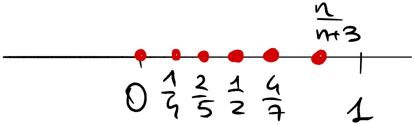
2. $\{x \in \mathbb{R} : \; x \le e\}$



superiorm. limitato

NON è inferiorm. limitato

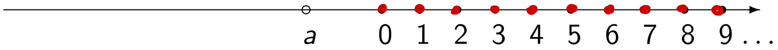
3. $\{x \in \mathbb{R} : \; x = \frac{n}{n+3}, \quad n \in \mathbb{N}\}$



è superiorm e inferiorm. limitato

Esempio 4

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$$



$\mathbb{N}$ è inferiorm. limitato e l'insieme dei suoi minoranti è

$$m(\mathbb{N}) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \}$$

$\mathbb{N}$ non è superiormente limitato

- Gli insiemi

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q} \text{ non sono superiormente limitati.}$$

Poiché $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, è sufficiente dimostrare che

$$\mathbb{N} \text{ non è superiormente limitato.}$$

Questo discende dalla

Proprietà di Archimede

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \ a, \ b > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, \ n \neq 0, \quad na > b$$

Applichiamola con $a = 1$: quindi

$\forall b \in \mathbb{R}, b>0 \ \exists n \in \mathbb{N}, n \neq 0 : \ n > b$

$\Rightarrow \forall b \in \mathbb{R}, b>0, \ b$ NON è un maggiorante per $\mathbb{N}$

Chiaramente ogni $b \in \mathbb{R}$, $b < 0$ non è maggiorante per $\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ non ha maggioranti in $\mathbb{R}$

Conseguenza 2 della proprietà archimedea

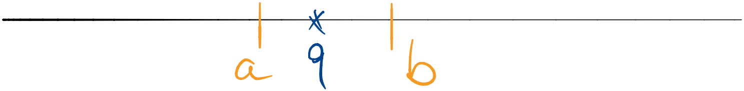
$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$,

cioè

Dati comunque due numeri reali a, b tali che $a < b$, esiste sempre un numero razionale q tale che $a \leq q \leq b$,

in simboli

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b \quad \exists q \in \mathbb{Q} : \quad a \leq q \leq b$$



Estremo superiore

Sia

$$A \neq \emptyset$$

Diciamo che $M^* \in \mathbb{R}$ è *l'estremo superiore* di A se (contemporaneamente) si ha che

1. M^* è un maggiorante per A;
2. $M^* \leq M$ per ogni maggiorante M di A

Useremo la notazione $M^* = \sup(A)$.

(cioè M^* è il "più piccolo" fra i maggioranti di A)

Dalla definizione **NON** segue che $\sup(A) \in A$.

Unicità dell'estremo superiore

Diciamo che M^* è **IL** sup(A)

Possiamo dirlo perché vale un teorema di unicità

Teor Siano $M_1^* \in \mathbb{R}$ e $M_2^* \in \mathbb{R}$ estremi superiori per A.

Allora $M_1^* = M_2^*$

Dimostrazione

Dalla definizione di estremo superiore segue che $M_1^* \leq M_2^*$:

infatti, M_2^* è, in particolare, un maggiorante, mentre M_1^* è il più piccolo fra i maggioranti. Quindi $M_1^* \leq M_2^*$

Con lo stesso ragionamento si dimostra che $M_2^* \leq M_1^*$.

Allora,

$$(M_1^* \leq M_2^* \text{ e } M_2^* \leq M_1^*) \Rightarrow M_1^* = M_2^* \quad \boxtimes$$

Massimo

Sia

$$A \neq \emptyset$$

e sia $M^* = \sup(A)$. Se $M^* \in A$, allora diciamo che M^* è il *massimo* di A e scriviamo $M^* = \max(A)$.

L'unicità del massimo segue dall' unicità dell' estremo superiore.

Estremo inferiore

Sia

$$A \neq \emptyset$$

Diciamo che $m^* \in \mathbb{R}$ è *l'estremo inferiore* di A se (contemporaneamente) si ha che

1. m^* è un minorante per A;
2. $m^* \geq m$ per ogni minorante m di A

Useremo la notazione $m^* = \inf(A)$.

(cioè m^* è il più grande fra i minoranti di A)

Dalla definizione **NON** segue che $\inf(A) \in A$.

Si ha l'unicità dell'estremo inferiore

(e si dimostra <u>esattamente</u> come per le sup, ESERCIZIO!)

Minimo

Sia

$$A \neq \emptyset$$

e sia $m^* = \inf(A)$. Se $m^* \in A$, allora diciamo che m^* è il *minimo* di A e scriviamo $m^* = \min(A)$.

L'unicità del minimo segue dall'unicità dell'inf.

Esempio 1

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2\}.$$

- L'insieme dei maggioranti di A è

$M(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

$\Longrightarrow \sup(A) = 2$. Siccome $2 \in A$,

$2 = \max(A)$

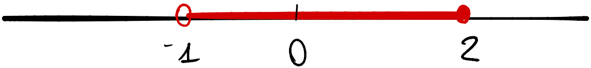
- L'insieme dei minoranti di A è

$m(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$. $\inf(A) = -1 \in A$

$\Longrightarrow -1 = \min(A)$

Esempio 2

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ -1 < x \leq 2\}$$



- Maggioranti

  $\mathcal{M}(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \}$

  $\Rightarrow \sup(A) = 2 \in A \Rightarrow 2 = \max(A)$

- Minoranti

  $m(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \}$

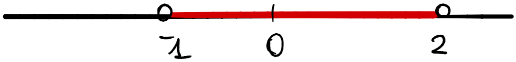
  $\Rightarrow \inf(A) = -1 . \quad -1 \notin A \Rightarrow$ A non ammette minimo!

Si confronti con il teorema del buon ordinamento.

È falso che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ ammetta minimo.

Esempio 3

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ -1 < x < 2\}$$



- Maggioranti $\quad \mathcal{M}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

  $\sup(A) = 2$

  $2 \notin A \Rightarrow A$ non ha massimo

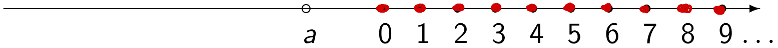
- Minoranti $\quad m(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$

  $\inf(A) = -1 \notin A$

  $\Rightarrow A$ non ha minimo

Esempio 4

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$



- $\min(\mathbb{N}) = 0$
- $\mathbb{N}$ non è superiormente limitato

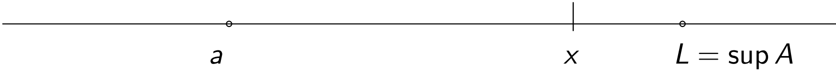
- **Caratterizzazione del** sup

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto & limitato superiormente:

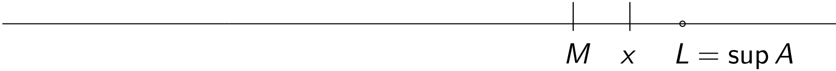
$$\text{un numero } L \in \mathbb{R} \text{ è } \sup A$$

se e solo se

1. L è un maggiorante per A, cioè $\underline{\forall x \in A,\ x \leq L}$



2. L è il più piccolo dei maggioranti di A, e cioè
$\underline{\forall M \in \mathbb{R} \text{ con } M < L\ \exists x \in A\colon\ M < x}$



Caratterizzazione del $\sup$ con ε

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto & limitato superiormente: $L = \sup A$ se e solo se

1. $\forall x \in A$, $x \leq L$
2. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, x \in A \, : \, L - \varepsilon < x$.

Analogamente,

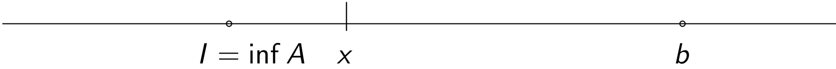
Caratterizzazione dell'inf

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto & limitato inferiormente:

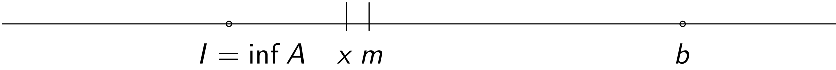
$$\text{un numero } I \in \mathbb{R} \text{ è } \inf A$$

se e solo se

1. $\forall x \in A$, $x \geq I$



2. $\forall m \in \mathbb{R}$, con $m > I$, $\exists x \in A$: $x < m$.



Caratterizzazione del $\inf$ con ε

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto & limitato inferiormente: $I = \inf A$ se e solo se

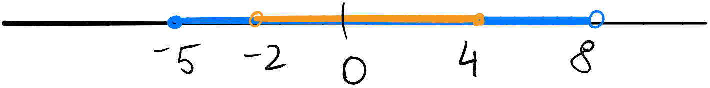
1. $\forall x \in A$, $x \geq I$
2. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, x \in A \, : \, x < I + \varepsilon$.

Comportamento di inf e sup rispetto all'inclusione

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsiemi non vuoti.

$$A \subseteq B \;\Rightarrow\; (\sup A \leq \sup B \;\; \textbf{e} \;\; \inf A \geq \inf B)\,.$$

Non dimostriamo questa proprietà in generale, ma la verifichiamo su un esempio.



$A = (-2, 4]$

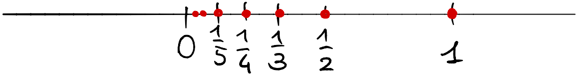
$B = [-5, 8)$

$\inf(A) = -2 > \inf(B) = \min(B) = -5$

$\sup(A) = \max(A) = 4 < \sup(B) = 8$

Esempio

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}$$



- Dimostriamo $\boxed{\sup A = 1}$.

L'insieme dei maggioranti di A è $\mathcal{M}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$. Quindi $\sup(A) = 1$.

Poiché $1 \in A \Rightarrow 1 = \max(A)$.

- Dimostriamo $\boxed{\inf A = 0}$ con la caratterizzazione di inf:

Osserviamo che $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ \frac{1}{n} > 0$

$\Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \subseteq m(A)$ insieme dei minoranti di A

Ora dimostriamo che

$$0 = \inf(A)$$

(e quindi $m(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$)

uso la caratterizzazione di inf: devo verificare che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}, \bar{n} \geq 1$, con $\frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$

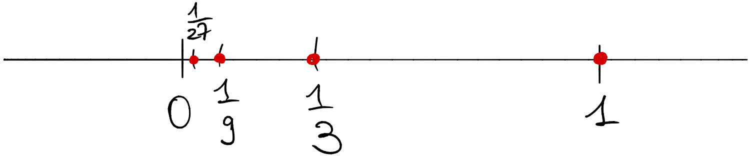
$\Leftrightarrow \bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$

Quindi devo verificare questo

E questo segue dalla proprietà Archimedea

Esempio

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, x = \frac{1}{3^n},\ n \in N \right\}.$$



ESERCIZIO: dimostrare che

$\sup(A) = 1 = \max(A)$

$\inf(A) = 0$ (proprietà Archimede)

L'assioma di completezza di $\mathbb{R}$

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto.

- Se A è superiormente limitato in $\mathbb{R}$ (cioè se A ha almeno un maggiorante in $\mathbb{R}$), allora A ha l'estremo superiore **in** $\mathbb{R}$.
- Se A è inferiormente limitato in $\mathbb{R}$ (cioè se A ha almeno un minorante in $\mathbb{R}$), allora A ha l'estremo inferiore **in** $\mathbb{R}$.

L'assioma di completezza non afferma che ogni insieme $\neq \emptyset$ e limitato superiormente abbia massimo!!!!

Avere il massimo dipende infatti dalla proprietà che il sup appartenga all'insieme!

$\mathbb{Q}$ NON è completo

*Per negare che una proprietà sia vera *universalmente*, bisogna esibire un controesempio!*

$$\boxed{\mathcal{H} = \left\{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 \leq 2\right\} \subset \mathbb{Q}}$$

1. $\mathcal{H}$ è superiormente limitato in $\mathbb{Q}$
2. $\mathcal{H}$ **NON** ha sup in $\mathbb{Q}$.

Esercizio: $\mathcal{H}$ è inferiorm. limit. in $\mathbb{Q}$ ma non ha inf in $\mathbb{Q}$.

1) Verifichiamo che $\mathcal{H}$ è superiormente limitato in $\mathbb{Q}$

$$\mathcal{H} = \{ x \in \mathbb{Q} \;/\; -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \}$$

Quindi $\mathcal{H}$ ammette maggioranti in $\mathbb{Q}$:

per esempio, $\frac{3}{2}$ e 2 sono maggioranti (RAZIONALI) di $\mathcal{H}$.

2) $\mathcal{H}$ non ammette sup in $\mathbb{Q}$

Siccome $\mathcal{H}$ è un insieme superiormente limitato in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ è completo,

$\mathcal{H}$ ha l'estremo superiore in $\mathbb{R}$.

Si vede che $\quad \sup_{\mathbb{R}} \mathcal{H} = \sqrt{2}$

Per assurdo $\quad \exists \; \overline{q} := \sup_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}$.

Poiché

$$\mathcal{H} = \{ x \in \mathbb{Q} \,/\, -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \}$$

notare le disuguaglianze strette

si vede che $\quad \overline{q} > \sqrt{2}$

Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$,

$\exists$ (infiniti) $y \in \mathbb{Q}$ tali che

$$\sqrt{2} < y < \overline{q}$$

Quindi tali y sono in particolare

dei maggioranti per $\mathcal{H}$, sono razionali, e verificano $y < \bar{q}$.

Questo è in contraddizione con il fatto che

$$\bar{q} = \sup_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}. \qquad \text{Assurdo!}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ non ammette sup in $\mathbb{Q}$!

L'altra faccia della medaglia: il teorema degli elementi separatori

- In molti testi l'assioma di completezza viene formulato, **in modo equivalente**, in termini dell'esistenza di (almeno) un elemento separatore per due classi separate
- A partire dall'assioma di completezza dato in termini di esistenza di sup, inf, si dimostra il *teorema degli elementi separatori* ($= \exists$ di un elemento sep. per due classi sep.)
- Viceversa, a partire dall'assioma di completezza in termini di classi separate si dimostra il teorema di esistenza di sup & inf per insiemi sup./inf. limitati (risp.)

La retta reale

$\mathbb{R}$ completo $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}$ non ha "lacune".

Geometricamente, questo equivale a

ogni punto di una retta può essere univocamente associato

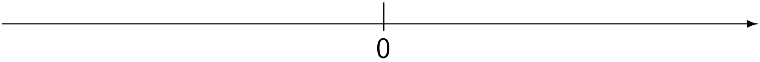
ad un numero reale

E

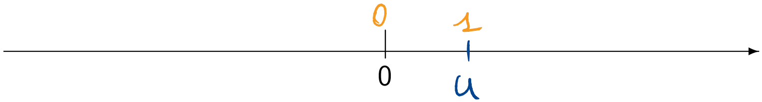
a ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto

su una retta

Si rappresenta $\mathbb{R}$ con la retta reale:

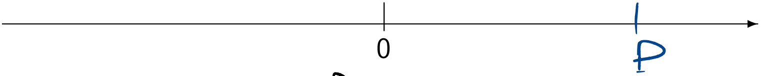


Si rappresenta $\mathbb{R}$ con la retta reale:



- Si fissa sulla retta un punto
  - O, origine, a cui associato lo 0
  - U, unità, a cui associato 1
- Il verso di percorrenza da O a U è considerato il verso positivo, quello opposto il verso negativo
- $\Rightarrow$ 2 semirette
  - SEMIRETTA positiva (contenente U)
  - SEMIRETTA negativa

Si rappresenta $\mathbb{R}$ con la retta reale:



- Dato un punto P sulla retta, a esso viene associato l'unico numero reale $x \in \mathbb{R}$ definito in questo modo:

$$x := \begin{cases} \overline{OP} & \text{se } P \text{ appartiene alla semiretta POS.} \\ -\overline{OP} & \text{"} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{" NEG} \end{cases}$$

con $\overline{OP}$ la lunghezza del segmento OP

x viene detto ascissa di $\underline{P}$

Viceversa a ogni $x \in \mathbb{R}$ è associato uno e un solo P sulla retta (VEDI DISPENSE..)

La retta reale estesa

♣ **Scopo:**

Estendere le nozioni di

- $\sup A$ al caso in cui A è $\emptyset$ oppure **NON** è superiormente limitato
- $\inf A$ al caso in cui A è $\emptyset$ oppure **NON** è inferiormente limitato

$\Rightarrow$ Introduciamo i **simboli** $+\infty$ e $-\infty$, definiti da

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x < +\infty$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x > -\infty$$

Definizione

Chiamiamo insieme dei numeri reali estesi, denotato con

$$\overline{\mathbb{R}}$$

l'insieme costituito dai numeri reali e dai due <u>simboli</u> $+\infty$ e $-\infty$, cioè

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

N.B. $+\infty$ e $-\infty$ **NON sono** numeri reali!!!!!!!!!!!

Li chiamiamo SIMBOLI

Relazione d'ordine e operazioni su $\overline{\mathbb{R}}$

- Estendiamo a $\overline{\mathbb{R}}$ la relazione d'ordine, su $\mathbb{R}$ ponendo

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty \leq x \leq +\infty;$$

- estendiamo a $\overline{\mathbb{R}}$ la somma e il prodotto di $\mathbb{R}$ ponendo

$$\begin{array}{ll}
\forall x < +\infty & x + (-\infty) = -\infty, \\
\forall x > -\infty & x + (+\infty) = +\infty, \\
\forall x > 0 & x \cdot (+\infty) = +\infty, \\
\forall x < 0 & x \cdot (+\infty) = -\infty, \\
\forall x > 0 & x \cdot (-\infty) = -\infty, \\
\forall x < 0 & x \cdot (-\infty) = +\infty, \\
\forall x \in \mathbb{R} & \frac{x}{\pm\infty} = 0, \\
\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \frac{x}{0} = \pm\infty, \\
\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 & \frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty, \\
\forall x \in \mathbb{R},\ x < 0 & \frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty
\end{array}$$

Non sono definite (e quindi non hanno senso) le operazioni

$$(+\infty) + (-\infty) \qquad (\pm\infty) \cdot 0 \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Ritorneremo su questi casi parlando di forme indeterminate (nella teoria dei limiti)

- per ogni $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $+\infty$ è un maggiorante per A;

Infatti, per definizione si ha che

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \qquad x \leq +\infty$$

$\Rightarrow +\infty$ è un maggiorante per ogni $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$

- per ogni $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $-\infty$ è un minorante per A.

sup e inf di insiemi illimitati

~~Scriveremo~~ Si ha che

- $\sup A = +\infty$ se A NON è superiormente limitato

Infatti, se $A \subset \mathbb{R}$ non è superiormente limitato (quindi non ammette maggioranti in $\mathbb{R}$), esso ha comunque $+\infty$ come (unico) maggiorante in $\overline{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow \sup A = +\infty$

- $\inf A = -\infty$ se A NON è inferiormente limitato

(Dimostrare per esercizio)

- $\sup \emptyset = -\infty$
- $\inf \emptyset = +\infty$

Dimostriamo che

$$\sup(\emptyset) = -\infty$$

(ES: dimostrare che $\inf(\emptyset) = +\infty$)

È sufficiente osservare che l'insieme dei maggioranti dell'insieme vuoto è $\overline{\mathbb{R}}$

(e quindi, $M(\emptyset) = \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \sup(\emptyset) = -\infty$)

Dimostriamolo per assurdo:

Per assurdo

$\exists\, y \in \overline{\mathbb{R}} : y$ NON è maggiorante per $\emptyset$.

$\Rightarrow \exists\, y \in \overline{\mathbb{R}} : \exists\, x \in \emptyset : y < x$

e questo è un assurdo!

(abbiamo scritto: $\exists x \in \emptyset$!!)

Con queste convenzioni $\overline{\mathbb{R}}$ è un insieme

- totalmente ordinato;
- ogni sottoinsieme $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ ha dei maggioranti, e

$$A \neq \emptyset,\ A \text{ superiormente limitato} \quad \Rightarrow \sup A \in \mathbb{R},$$

$$A \neq \emptyset,\ \ A \text{ NON superiormente limitato} \quad \Rightarrow \sup A = +\infty,$$

$$A = \emptyset \quad \Rightarrow \sup A = -\infty.$$

- ogni sottoinsieme $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ ha minoranti ed estremo inferiore (.... **completare**)
- Le caratterizzazioni dell'estremo inferiore e superiore con ε **valgono solo** se sup e inf sono numeri reali.

Definizione di intervallo

Un sottoinsieme $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ è un intervallo se e solo se

$$\forall x, y \in I \quad x < z < y \quad \Rightarrow \quad z \in I.$$

Definizione

- Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e tali che $a \leq b$. Chiamiamo intervallo chiuso di estremi a e b l'insieme

$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \quad a \leq x \leq b\}.$$

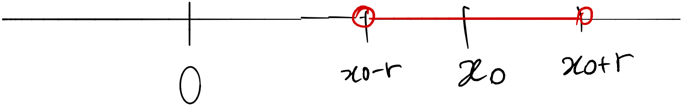
- Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e tali che $a < b$. Chiamiamo intervallo aperto di estremi a e b l'insieme

$$(a, b) =]a, b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \quad a < x < b\}.$$

Intorno

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. Chiamiamo intorno sferico di centro x_0 e raggio r l'insieme dei numeri reali che distano da x_0 meno di r. In simboli

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\}.$$



♣ Notare che

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \;\; \forall\, r_1,\, r_2 \in \mathbb{R} \qquad r_1 < r_2 \Rightarrow I_{r_1}(x_0) \subseteq I_{r_2}(x_0).$$