Analisi Matematica I

04.09.2023

Tempo a disposizione: 90 minuti

Esercizio 1. Determinare il luogo geometrico descritto dagli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\operatorname{Im}\left(\frac{5}{z}\right) - \frac{5}{\operatorname{Re}(iz)} = \frac{2}{|z|^2}$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} (n^4 + n) \log\left(\cos\left(\frac{2}{n^2}\right)\right)$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 3. Determinare tutti e soli i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie numerica

$$\sum_{n=1} \frac{[e^{2n} + 3\log(1+n^4)]^2}{(n^{3\alpha}+3)(e^{\alpha n} + |\cos(n^n)|)}$$

converge.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 4. Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la continuità e derivabilità in $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7x+x^2}}{x^\alpha} & \text{se } x > 0 \\ \log\left(1 + \sin\left(\frac{x^2}{3}\right)\right) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 5. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\, \mathrm{d}x$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 6. Risolvere, al variare del parametro $\alpha > 0$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^3} \\ y\left(\frac{1}{\pi}\right) = \alpha \end{cases}.$$

[Punteggio: 5 punti]

Punteggio di ammissione alla prova di teoria: si è ammessi alla prova di teoria solo con un punteggio maggiore o uguale a **16**.