Analisi Matematica I

Tempo a disposizione: 1 ora

Esercizio 1. Determinare il luogo geometrico dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^2 + \bar{z}(z+i) = 0.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Determinare per quali valori del parametro $\alpha > 0$ si ha che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1+\dfrac{\pi^{1/n}}{n^\alpha}\right)\log\left(1+\dfrac{\arctan(e^n)}{n}\right)}{\exp((1-\alpha)n!)}$$

converge.
[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 3. Classificare il punto di non derivabilità $x_0 = 0$ per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(e^{2x}) & \text{se } x > 0, \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{se } x = 0, \\ \sqrt[3]{\sin^2(x)} + \dfrac{\pi}{4} & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 4.

1. Calcolare l'integrale
$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{x}{x^2+2x+2} + \sin(x^3)\right) dx.$$
[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 5. Rispondere alle seguenti domande:

(a) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Dare la definizione della proprietà: "La serie $\sum_n a_n$ converge."

(b) Dare la definizione della condizione di Cauchy per le successioni ed enunciare il criterio di Cauchy.

(c) Scrivere l'enunciato del teorema di Lagrange.

(d) Dimostrare, a scelta, il criterio di Cauchy oppure il teorema di Lagrange.

[Punteggio: 8 punti]