

Analisi Matematica I

10.02.2023

Tempo a disposizione: 90 minuti

Esercizio 1. Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(z) \left[\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right) - i\operatorname{Re}\left(\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)\right) \right] + \frac{1}{8}(z + \bar{z}) \leq 0 \\ z\bar{z} \leq 9i \exp\left(i\frac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + 2n + n^2}{n^2} \right)^{3n+1}$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 3. Determinare, al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan(\exp(n^n - 3))}{[\log(n!) - \log((n-1)!)]^{2\beta+1}} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 4. Determinare tutti e soli i valori di $\alpha > 0$ per i quali la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^3) - \sin(x^3)}{x^\alpha} & \text{se } x > 0 \\ 1 - \cos(x^2) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

risulta derivabile in $x = 0$.

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 5. Per la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{x+1}\right) + 3x$$

dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando tutte le risposte:

1. $D_f = \mathbb{R}$
2. la retta $x = -1$ è asintoto verticale destro per il grafico di f
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
4. f ha in $x_0 = -\frac{2}{3}$ un punto di minimo assoluto

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 6. Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x - 1) \sin x}{\cos^2 x + 4 \cos x + 5} dx$$

[Punteggio: 6 punti]

Punteggio di ammissione alla prova di teoria: si è ammessi alla prova di teoria solo con un punteggio maggiore o uguale a 16.