

Analisi Matematica I

12.07.2022

Tempo a disposizione: 90 minuti

Esercizio 1. Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\operatorname{Im} [i(z + \bar{z} - 2)](z + i)(\bar{z} + i) = 0.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n - n^2 \arctan \frac{1}{n})(n+1)!}{n! + 3^n}.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 3. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log \left(1 + \frac{\log(e^2)}{(n+1)} \right) \frac{\exp((2\alpha+1)n)}{\log(n+2)}.$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 \sqrt[3]{x+1} & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che f è continua in $x_0 = 0$? Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che f è derivabile in $x_0 = 0$?

Ricordare che la derivabilità si studia tramite le derivate unilateri, e non tramite i limiti unilateri della derivata!

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 5. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{2+\sqrt{x}}} dx.$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 6. Sia \tilde{y} la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y & = 3 \cos x \\ y(0) & = 1 \\ y'(0) & = 2 \end{cases}.$$

Calcolare $\tilde{y}(\pi/2)$.

[Punteggio: 5 punti]

Punteggio di ammissione alla prova di teoria: si è ammessi alla prova di teoria solo con un punteggio maggiore o uguale a **16**.