

Analisi Matematica I

20.01.2022

Tempo a disposizione: 90 minuti

Esercizio 1. Determinare il sottoinsieme di \mathbb{C} costituito dai numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che il numero complesso

$$\frac{\operatorname{Re}(z - (1 + i\sqrt{3})^7) + \operatorname{Im}(z\bar{z}e^{i\frac{\pi}{2}} - 1)}{||z|^2 - 4|}$$

è ben definito ed è reale non negativo.

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ si ha convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\right) (\sqrt{n^3 + n^{2\beta}} - n^\beta).$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 3. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\right)^x$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 4. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^4(x) - x^6}{\log(1 + x^\alpha)} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \arctan(e^{1/x^3}) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ha in $x_0 = 0$ un punto di discontinuità/non derivabilità e, in tal caso, classificarlo.

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 5.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \sin x) \cos x}{\sin^2 x + 2 \sin x + 2} dx$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 6. Sia \tilde{y} la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'' + y &= x^2 \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Allora $\tilde{y}(2\pi)$ vale...

[Punteggio: 5 punti]

Punteggio di ammissione alla prova di teoria: si è ammessi alla prova di teoria solo con un punteggio maggiore o uguale a **16**.