Analisi Matematica I

Tempo a disposizione: 1 ora

Esercizio 1. Determinare per quali valori del parametro $\beta > 0$ si ha che la serie

$$\sum_{n=1} \frac{(n+3)! + e^{4n} + \sin(n)}{(n! + n^2)\left(n^\beta + \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

converge.
[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 2. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x-5)}{(x-5)} + 1 & \text{se } x > 5, \\ \alpha & \text{se } x = 5, \\ \dfrac{(\log(6-x))^2}{1 - \cos(\log(6-x))} & \text{se } x < 5 \end{cases}$$

ha in $x = 5$ un punto di discontinuità eliminabile.
[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 3. Quale teorema assicura che la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{2x+3}(2x^2 - 4x - 11)$$

ammette punti di estremo assoluto nell'intervallo $[-5, 10]$? Determinare tali punti di estremo assoluto.
[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 4. Determinare la primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

tale che $F(0) = 0$.
[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 5. Rispondere alle seguenti domande:

(a) Dare la definizione, opportunamente ambientata, di funzione derivabile in un punto.

(b) Scrivere l'enunciato del teorema di Rolle.

(c) Scrivere l'enunciato del primo teorema fondamentale del calcolo integrale.

(d) Dimostrare, a scelta, uno dei suddetti teoremi.

[Punteggio: 8 punti]