Analisi Matematica I – Scritto del 03.09.2020

Tempo a disposizione: 1 ora

Esercizio 1. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \exp\left(-\frac{1}{2n^2}\right)}{\frac{1}{n^3}}$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \log(4+x^2)\,\mathrm{d}x$$

Suggerimento: *ricordare come si integra il prodotto di un polinomio per un logaritmo....*
[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 3. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \geq 0$ si ha che l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x^\alpha)\arctan(x^\alpha)}{x+x^2}\,\mathrm{d}x$$

converge.
[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 4. Sia $\tilde{y}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}.$$

Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \tilde{y}(x)\,.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 5. Rispondere alle seguenti domande:

(a) Siano $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo) e $x_0 \in I$ un punto interno ad I. Supponiamo che f sia continua in x_0 ma non derivabile. Descrivere le (3) tipologie di non derivabilità che possono presentarsi in x_0.

(b) Sia $\{a_n\}$ una successione reale. Dare la definizione della proprietà *la serie* $\sum_n a_n$ *converge.* Enunciare il teorema sulla condizione **necessaria** per la convergenza di una serie.

(c) Scrivere l'enunciato del primo teorema fondamentale del calcolo integrale.

(d) Dimostrare, a scelta, il teorema sulla condizione necessaria per la convergenza di una serie, oppure il primo teorema fondamentale del calcolo integrale.

[Punteggio: 8 punti]