

Analisi Matematica I – Scritto del 10.02.2021

Tempo a disposizione: 75 minuti

Esercizio 1. Determinare l'insieme di \mathbb{R}^2 che rappresenta gli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$(z^2 + z\bar{z} - 2 + i)(|z| - 2) = 0.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha} \arctan(n^{-6}) \frac{[(2n+1)!]^{\alpha-3}}{\log(n^{3/2} + 2) - \log(n\sqrt{n} - 1)}$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f :]1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{e^x}{x\sqrt{x-1}}$$

Determinare

$$\sup_{x \in]1, 3]} f(x), \quad \min_{x \in]1, 3]} f(x).$$

Suggerimento: sarà necessario calcolare i limiti di f agli estremi del dominio di definizione, e calcolarne i punti di estremo relativo/assoluto...

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 4. Calcolare

$$\int_1^e \log(x^2) \arctan(\log(x)) \frac{1}{x} dx.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 5. Calcolare, al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) + \frac{1}{4}y(x) = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \beta \end{cases}.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 6. Si consideri una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f(0) = 0$. Invocando un opportuno teorema, dimostrare che

$$\forall b > 0 \quad \exists \xi \in (0, b) : \quad f(b) = f'(\xi)b.$$

[Punteggio: 3 punti]