Analisi Matematica I – Scritto del 21.06.2021

Tempo a disposizione: 75 minuti

Esercizio 1. Determinare e rappresentare graficamente il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$(z^2 + 4\mathrm{Im}^2(z) + \overline{z}^2 - 4)(z^4 - 1 - i) = 0.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\left(1 + \frac{4}{(2n-1)!}\right)^{(2n)!}\right) \frac{\exp(\alpha n - 5)}{\log(n^{2(\alpha^2+1)})} .$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 3. Calcolare il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+2)^{x+1}}{x^x} \log\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 4. Calcolare l'integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} \log(x+2)\, dx.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 5. Sia $\tilde{y}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'' + y &= \sin x \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Calcolare $\tilde{y}(\pi)$.
[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 6. Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le risposte:

1. $\mathrm{im}(f)$ è un insieme limitato;
2. se f è strettamente decrescente su $]a, b[$, allora $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]a, b[$;
3. $\mathrm{im}(f)$ è un intervallo.

[Punteggio: 3 punti]