Successioni numeriche

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Definizione

Una successione a valori reali è una funzione

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & a_n = f(n). \end{array}$$

- si indica con $\{a_n\}$ o $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- a_n è l'elemento n-esimo della successione $\{a_n\}$.
- fissato $n_0 \in \mathbb{N}$, se $\mathrm{dom f} = \{\mathrm{n} \in \mathbb{N} \,:\, \mathrm{n} \geq \mathrm{n_0}\}$, allora si scrive $\{a_n\}_{n\geq n_0}$.

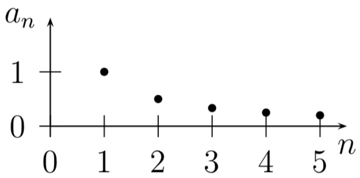
Esempio 1

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ n > 0$$

quindi

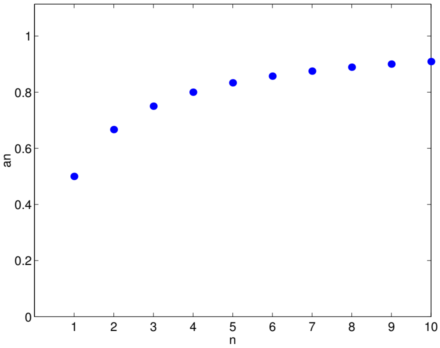
$$\mathrm{dom}(a_n) = \mathbb{N}^+ \subset \mathbb{N}$$

(Il dominio di $\{a_n\}$ può non essere uguale a "tutto" $\mathbb{N}$)



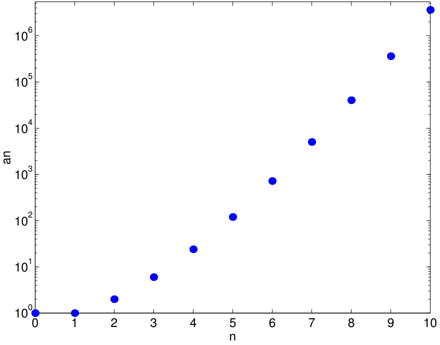
Esempio 2

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$



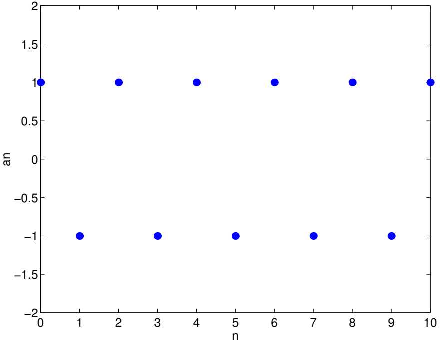
Esempio 3: il fattoriale di n

$$a_n = n!, \qquad n \in \mathbb{N}.$$



Esempio 4

$$a_n = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$



♢ Successioni convergenti

Esempio

$$a_n := \frac{n}{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Definizione

Sia $L \in \mathbb{R}$. Si dice che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, converge a L quando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| \leq \varepsilon,$$

e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$

- Altre notazioni:

$$\lim_n a_n = L, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L,$$

$$a_n \longrightarrow L \text{ per } n \to \infty,$$

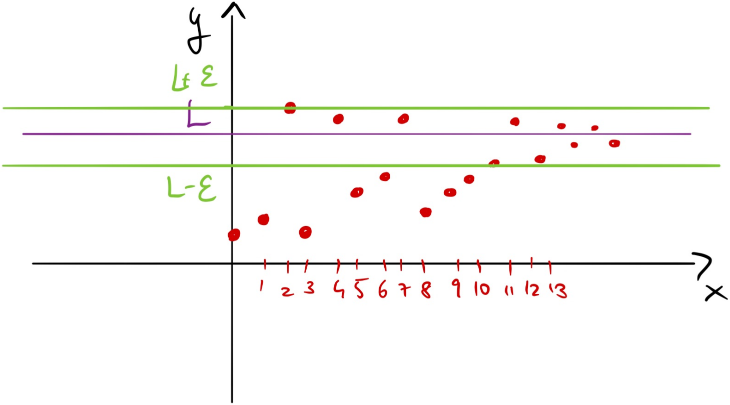
$$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L.$$

Per ogni fissato $\varepsilon > 0$, $\quad \forall \varepsilon > 0$

da un certo punto in poi $\quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \, : \, \forall n \geq n_\varepsilon$

tutti i valori della successione

distano da L meno di ε $\quad |a_n - L| \leq \varepsilon$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| \leq \varepsilon,$$

MAI cambiare l'ordine dei quantificatori!!!

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| \leq \varepsilon,$$

Che cosa è lecito cambiare in questa definizione?

Una successione non può ammettere due limiti diversi

Teorema di unicità del limite

Supponiamo che

$$\left(a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L, \quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L'\right).$$

Allora

$$L = L'.$$

Successioni infinitesime

Chiamiamo infinitesima una successione $\{a_n\}$ convergente a 0 per $n \to \infty$, cioè

Osservazione: $\{a_n\}$ è infinitesima **se e solo se** $\{|a_n|\}$ è infinitesima.

Esempio 1

La successione $a_n = \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^+,$ è infinitesima.

Esempio 2

Sia

$$q \in \mathbb{R}, \quad \text{con} \quad \boxed{|q| < 1.}$$

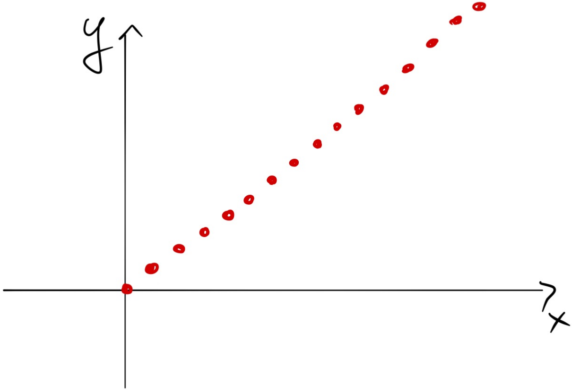
Allora

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

♢ Successioni divergenti

Esempio

$$a_n := n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$



Definizione

Diciamo che una successione $\{a_n\}$ tende a $+\infty$ (o diverge a $+\infty$, o diverge positivamente), e scriviamo

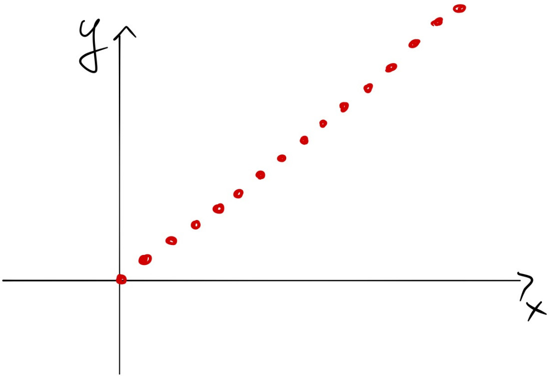
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

se

$$\forall M > 0 \ \exists n_M \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_M \quad \Rightarrow \quad a_n \geq M.$$

Per ogni fissato $M > 0$,	$\forall\, M > 0$
da un certo punto in poi	$\exists n_M \in \mathbb{N} \;:\; \forall n \geq n_M$
tutti i valori della successione sono maggiori di M	$a_n \geq M$

Notare che n_M dipende da M.



Esempio 1

Sia $\boxed{\alpha > 0}$: la successione

$$a_n = n^\alpha, \quad n \in \mathbb{N},$$

diverge a $+\infty$.

Esempio 2

La successione

$$a_n = n!, \quad n \in \mathbb{N},$$

diverge a $+\infty$.

Esempio 3

La successione

$$a_n = n^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

diverge a $+\infty$.

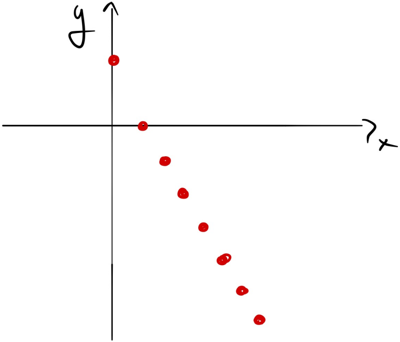
Successioni divergenti a $-\infty$

Diciamo che una successione $\{a_n\}$ tende a $-\infty$ (o diverge a $-\infty$) e scriviamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

se

$$\forall M > 0 \;\; \exists n_M \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_M \; \Rightarrow \; a_n \leq -M$$



Osservazioni: sia $\{a_n\}_n$ tale che $a_n \neq 0\,\forall n$: allora

(1) se $a_n > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

(2) se $a_n < 0$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

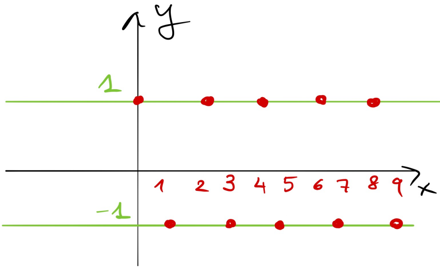
Successioni oscillanti

Diciamo che una successione $\{a_n\}$ è oscillante se

$$\{a_n\} \text{ non è né convergente né divergente}$$

Esempio

$$a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ è oscillante.}$$



Esempio

$$a_n = (-n)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ è oscillante.}$$

Classificazione

Una successione può essere:

- CONVERGENTE se
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \quad \text{con } L \in \mathbb{R} \text{ finito;}$$
- DIVERGENTE POSITIVAMENTE se
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty;$$
- DIVERGENTE NEGATIVAMENTE se
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty;$$
- OSCILLANTE se non è né convergente né divergente.

La successione geometrica

Sia $q \in \mathbb{R}$: consideriamo la successione

$$a_n = q^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Allora,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1, \\ 0 & \text{se } |q| < 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ +\infty & \text{se } q > 1. \end{cases}$$

Successioni limitate

Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. Diciamo che

- $\{a_n\}$ è <u>superiormente limitata</u> se

$$\exists M \in \mathbb{R} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M.$$

- $\{a_n\}$ è <u>inferiormente limitata</u> se

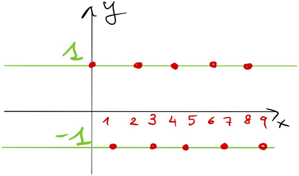
$$\exists m \in \mathbb{R} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq a_n.$$

- $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ si dice limitata se è superiormente e inferiormente limitata, cioè se esiste $M > 0$, tale che

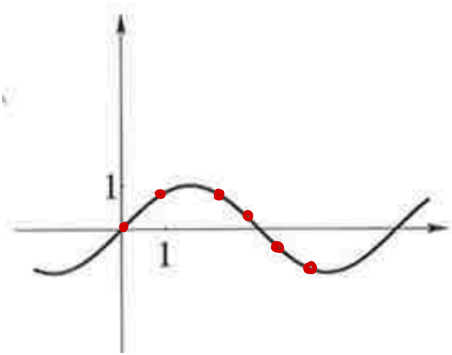
$$|a_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- **Esempio:** sono limitate:

1. $a_n = (-1)^n$,



2. $a_n = \sin n$,



Teorema: limitatezza delle successioni convergenti

Supponiamo che $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ sia convergente a $L \in \mathbb{R}$. Allora $\{a_n\}$ è limitata.

Osservazione: NON vale il viceversa: falso che

$$\{a_n\} \text{ limitata } \Rightarrow \{a_n\} \text{ convergente.}$$

Controesempio:

1. $a_n = (-1)^n$,
2. $a_n = \sin n$,

sono oscillanti.

Operazioni con i limiti

Teorema (algebra dei limiti):
Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ successioni reali convergenti, cioè

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \quad \text{dove } a, b \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \qquad \text{se } b_n \neq 0, \quad \forall n \quad (\forall n \geq n_0)$$

Cosa succede nel caso di successioni divergenti?

Teniamo presente l'estensione dell'algebra di $\mathbb{R}$ a $\overline{\mathbb{R}}$, cioè

come sommare, moltiplicare, dividere

numeri reali x con $\pm\infty$

$$
\begin{array}{ll}
\forall\, x < +\infty & x + (-\infty) = -\infty, \\
\forall\, x > -\infty & x + (+\infty) = +\infty, \\
\forall\, x > 0 & x \cdot (+\infty) = +\infty, \\
\forall\, x < 0 & x \cdot (+\infty) = -\infty, \\
\forall\, x > 0 & x \cdot (-\infty) = -\infty, \\
\forall\, x < 0 & x \cdot (-\infty) = +\infty, \\
\forall\, x \in \mathbb{R} & \frac{x}{\pm\infty} = 0, \\
\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \frac{x}{0} = \pm\infty, \\
\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 0 & \frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty, \\
 & \\
\forall\, x \in \mathbb{R},\ x < 0 & \frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty
\end{array}
$$

Teorema: estensione dell'algebra dei limiti

1. se $a_n \to +\infty$ e $\{b_n\}$ è limitata inferiormente, allora $a_n + b_n \to +\infty$,
2. se $a_n \to -\infty$ e $\{b_n\}$ è limitata superiormente, allora $a_n + b_n \to -\infty$,
3. se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L > 0$, allora $a_n b_n \to +\infty$,
4. se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L < 0$, allora $a_n b_n \to -\infty$,
5. se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to L > 0$, allora $a_n b_n \to -\infty$,
6. se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to L < 0$, allora $a_n b_n \to +\infty$,
7. se $a_n \to +\infty$, allora $\frac{1}{a_n} \to 0$,
8. se $a_n \to 0$ e $a_n \neq 0$, allora $\frac{1}{|a_n|} \to +\infty$. In particolare, se $a_n \to 0$ e $a_n > 0$ $(a_n < 0)$ per ogni n, allora $\frac{1}{a_n} \to +\infty$ $(-\infty)$.

Osservazione:

$$a_n \to 0 \text{ e } a_n \neq 0 \ \textbf{NON IMPLICANO} \ \frac{1}{a_n} \text{ ha limite.}$$

Per esempio:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}: \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

ma

$$\frac{1}{a_n} = \frac{n}{(-1)^n} \text{ ha limite per } n \to \infty.$$

Infatti,

Non si può concludere nulla **A PRIORI** nei casi che non rientrano nell'algebra estesa dei limiti, cioè

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$
$$\frac{0}{0}, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

Sono le cosidette $\boxed{\text{forme indeterminate}}$.

Forme indeterminate associate a polinomi

Sia

$$P(n) = \alpha_p n^p + \alpha_{p-1} n^{p-1} + \cdots + \alpha_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se **non tutti** i coefficienti α_k, $k = 1, \ldots, p$ sono **concordi**, si può avere

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \infty - \infty$$

Per "risolvere" questa forma indeterminata, osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_p n^p + \alpha_{p-1} n^{p-1} + \ldots + \alpha_0)$$

Osservazione: l'infinito di n^p "vince" sugli infiniti di $n^{p-1}, \dots, n$.
Diremo che

n^p è un **infinito di ordine superiore**

rispetto a $n^{p-1}, \dots, n$.

Forme indeterminate associate a funzioni razionali fratte: esempio

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{4n^2+3n}$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty}(n^3-1) = +\infty - 1 = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}(4n^2+3n) = \infty + \infty = +\infty.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{4n^2+3n} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{FORMA INDETERMINATA.}$$

Per risolverla,

Osservazione: l'infinito di n^3 al numeratore "vince" sull'infinito di n^2 al denominatore, quindi il quoziente tende a ∞.

Forme indeterminate associate a funzioni razionali fratte: regola generale

Dati

$$P(n) = \alpha_p n^p + \alpha_{p-1} n^{p-1} + \cdots + \alpha_0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$Q(n) = \beta_q n^q + \beta_{q-1} n^{q-1} + \cdots + \beta_0, \quad n \in \mathbb{N},$$

con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_p \neq 0, \beta_q \neq 0$ e $p, q > 0$.

Si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_p}{\beta_q} & \text{se } p = q \\ +\infty & \text{se } p > q \text{ e } \alpha_p \beta_q > 0 \\ -\infty & \text{se } p > q \text{ e } \alpha_p \beta_q < 0 \\ 0 & \text{se } p < q. \end{cases}$$

Confronto asintotico

Abbiamo osservato che per $n \to +\infty$, n^p cresce **più velocemente** di n^q se $p > q > 0$, ossia

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^p}{n^q} = +\infty \qquad \forall p > q > 0.$$

Formalizziamo le espressioni *più velocemente/lentamente* con il concetto di

$$\boxed{\textbf{confronto asintotico fra successioni}}$$

Consideriamo $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, con

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \geq n_0, \quad b_n \neq 0,$$

entrambe divergenti ($\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \pm\infty$)
o entrambe infinitesime ($\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 0$).

◇ **Successioni entrambe divergenti**:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty.$$

Casi possibili:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \boxed{\text{A}} \\ l \in \mathbb{R}, \quad l \neq 0 & \boxed{\text{B}} \\ \pm\infty & \boxed{\text{C}} \\ \text{non esiste} & \boxed{\text{D}} \end{cases}$$

Definizione

1. $\{a_n\}$ è un infinito di ORDINE **INFERIORE** a $\{b_n\}$ **SE** $\boxed{\text{A}}$;
2. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infinito dello **STESSO** ORDINE **SE** $\boxed{\text{B}}$;
3. $\{a_n\}$ è un infinito di ORDINE **SUPERIORE** a $\{b_n\}$ **SE** $\boxed{\text{C}}$;
4. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ **NON** sono **CONFRONTABILI** **SE** $\boxed{\text{D}}$.

Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ allora $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ si dicono **ASINTOTICHE** e si scrive $a_n \sim b_n$.

$\diamondsuit$ **Successioni entrambe infinitesime**:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

Casi possibili:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0, & \boxed{\text{A}} \\ l \in \mathbb{R}, \quad l \neq 0, & \boxed{\text{B}} \\ \pm\infty, & \boxed{\text{C}} \\ \text{non esiste}, & \boxed{\text{D}} \end{cases}$$

Definizione

1. $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ORDINE **SUPERIORE** a $\{b_n\}$ **SE** $\boxed{\text{A}}$;
2. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infinitesimi dello **STESSO** ORDINE **SE** $\boxed{\text{B}}$;
3. $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ORDINE **INFERIORE** a $\{b_n\}$ **SE** $\boxed{\text{C}}$;
4. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ **NON** sono **CONFRONTABILI** **SE** $\boxed{\text{D}}$.

Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ allora $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ si dicono ASINTOTICHE e si scrive $a_n \sim b_n$.

• Il confronto asintotico fra successioni è un metodo comodo per risolvere le forme indeterminate

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ e } \frac{0}{0},$$

tenendo presente il comportamento asintotico di alcune successioni "campione".

Gerarchia di infiniti

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\log(n))^\beta}{n^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \beta \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \forall a > 1,$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \forall a > 1,$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Di conseguenza, per n sufficientemente grande ($n \geq n_0$) valgono le disuguaglianze

$$n^n \geq n! \geq a^n \geq n^\alpha \geq \log^\beta n \quad \forall a > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

Teorema della permanenza del segno

Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, con

$$a_n \to L \in (0, +\infty] \quad \text{per } n \to \infty$$

(risp., $a_n \to L \in [-\infty, 0)$). Allora

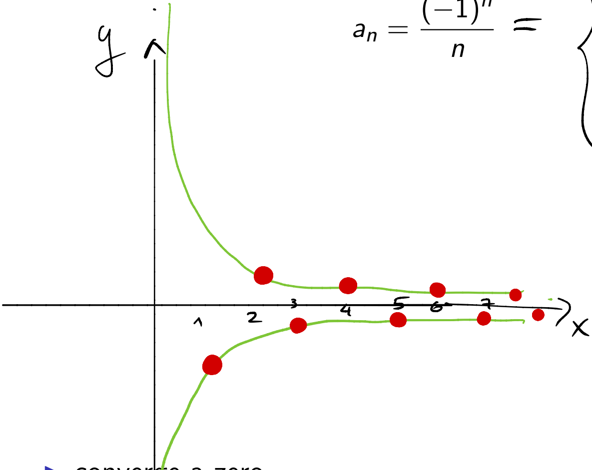
$$\exists m \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq m \quad a_n > 0 \quad (\text{risp. } a_n < 0).$$

Osservazione: nell'ipotesi, deve essere

$$L \neq 0, \text{ cioè } L > 0 \text{ o } L < 0.$$

Se $L = 0$ la tesi è falsa. Infatti,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ PARI} \\ -\frac{1}{n}, & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$



- converge a zero
- non è nè positiva, nè negativa.

Teorema del confronto

Siano $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ successioni **non oscillanti** (quindi convergenti o divergenti a $\pm\infty$). Se

$$\exists m_0 : \ \forall n \geq m_0, \quad a_n \leq b_n,$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Teorema dei due carabinieri

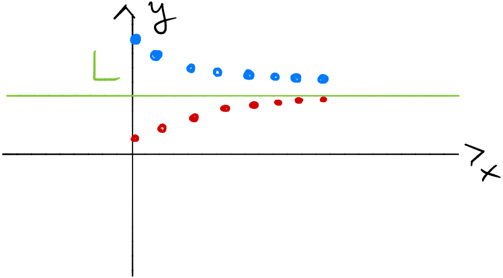
Supponiamo che $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ soddisfino

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Se $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ verifica

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq m_0 \quad a_n \leq c_n \leq b_n,$$

allora $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.



$\{a_n\}, \{b_n\}$

• **Un'importante conseguenza del Teorema dei due carabinieri:**
Generalizziamo la regola sul limite del prodotto.

Proposizione

Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ tali che

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
- $\{b_n\}$ è limitata.

Allora $\{a_n b_n\}$ è infinitesima.

Successioni monotone

Definizione

Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. Diciamo che

(i) $\{a_n\}$ è <u>non decrescente</u> se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\{a_n\}$ è <u>strettamente crescente</u> se $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\{a_n\}$ è <u>non crescente</u> se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(iv) $\{a_n\}$ è <u>strettamente decrescente</u> se $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(1) $\{a_n\}$ monotona non decrescente $\Rightarrow a_n \geq a_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{a_n\}$ **inferiormente limitata**.

(2) $\{a_n\}$ monotona decrescente $\Rightarrow a_n \leq a_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \{a_n\}$ **superiormente limitata**.

Limite delle successioni monotone: le successioni monotone non sono mai oscillanti

Teorema

Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$.

- Se $\{a_n\}$ è monotona crescente, allora $\{a_n\}$ non oscilla e

$$\lim_n a_n = \sup_n a_n.$$

- Sia $\{a_n\}$ monotona decrescente, allora $\{a_n\}$ non oscilla e

$$\lim_n a_n = \inf_n a_n.$$

Corollario: Ogni successione **monotona e limitata** converge a un limite $L \in \mathbb{R}$.

- **Esempio:** la successione $a_n = \frac{1}{n}$
  - è strettamente decrescente
  - è limitata.

    In particolare,
$$\inf_n a_n = 0.$$

Allora ritroviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_n a_n = 0.$$

- **Esempio:** la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

  - è strettamente crescente
  - è limitata: infatti,

$$2 \leq a_n < 3 \quad \forall\, n \geq 1.$$

Quindi $\{a_n\}$ è convergente al

$$\sup_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} a_n := e.$$

Ricordiamo che $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è il *numero di Nepero* (base dei logaritmi naturali): una sua approssimazione è

$$e \simeq 2,718281828459045235360287471352 7$$

Si noti che

$$2 < e < 3$$

Limite notevole: per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Sottosuccessioni

- Partiamo da una successione (cioè una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$)

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_5,\, \ldots\}$$

- Consideriamo la sua restrizione a sottoins. **infinito** $N' \subset \mathbb{N}$: per es.

$$N' = \{\text{numeri primi}\} = \{2,\, 3,\, 5,\, 7,\, 11,\, 13,\, \ldots\}$$

  otteniamo quindi

$$\{a_2,\, a_3,\, a_5,\, a_7,\, a_{11},\, a_{13},\, \ldots\}$$

- cioè la **nuova successione** $\{b_n\}$

$$b_0 := a_2,\ b_1 := a_3,\ b_2 := a_5,\ b_3 := a_7,\ b_4 := a_{11},\ b_5 := a_{13}, \ldots$$

- $\{b_n\}$ è ottenuta tramite **composizione** di successioni: $b_n = a_{f(n)}$, con

$$f(0) = 2,\ f(1) := 3,\ f(2) := 5,\ f(3) := 7,\ f(4) := a_{11}, \ldots$$

Definizione

Sia $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Diciamo che $\{b_k\}$ è sottosuccessione di $\{a_n\}$ se

$$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \textbf{ strettamente crescente}$$

tale che

$$b_k = a_{f(k)} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Esempi

Esempi

Esempi

Una nuova notazione per le sottosuccessioni

Limiti di sottosuccessioni

Teorema
Siano $\boxed{L \in \overline{\mathbb{R}}}$ e $\{a_n\}$ una successione. Si ha

$$a_n \to L \quad \Rightarrow \quad a_{n_k} \to L$$

$$\forall \text{ sottosuccessione } \{a_{n_k}\} \text{ di } \{a_n\}.$$

Quindi:

- se $\{a_n\}$ converge a L, allora ogni sua sottosuccessione converge a L,
- se $\{a_n\}$ diverge a $\pm\infty$, allora ogni sua sottosuccessione diverge a $\pm\infty$.

Corollario Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$.

1. Se esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ oscillante, allora $\{a_n\}$ è oscillante.
2. Se $\{a_{n_k}\}$ e $\{a_{n'_k}\}$ sono due sottosuccessioni di $\{a_n\}$ tali che

$$a_{n_k} \to L \qquad a_{n'_k} \to L'$$

e $L \neq L'$, allora $\{a_n\}$ oscilla.

Esempio:

Consideriamo $\{a_n\} = \{(-n)^n\}$

Successioni limitate e sottosuccessioni

Se una $\{a_n\}$ è convergente, allora $\{a_n\}$ è limitata. Il viceversa è FALSO.

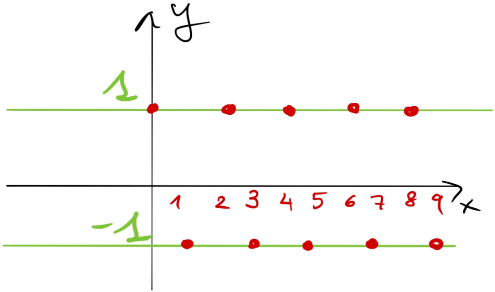
Domanda: se $\{a_n\}$ è limitata, esiste almeno qualche $\boxed{\text{sottosuccessione } a_{n_k}}$ di $\{a_n\}$ **convergente**???

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.

Esempi

:e:



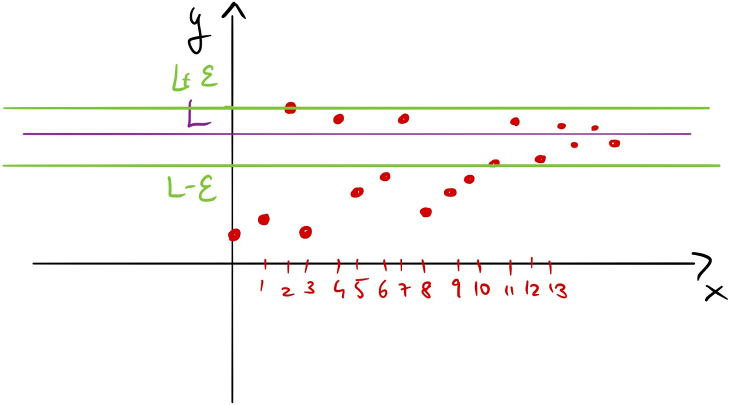
Il criterio di Cauchy

Quali condizioni assicurano (sono **sufficienti**) che una successione $\{a_n\}$ sia convergente??

- Se $\{a_n\}$ è monotona e limitata,
- Se $\{a_n\}$ non è monotona, in generale, si usa il Criterio di Cauchy.

Osservazione: sia $\{a_n\}$ convergente a L.

Per n, m sufficientemente grandi, gli elementi a_n e a_m rimangono "vicini".



Condizione di Cauchy

Diciamo che una successione $\{a_n\}$ è di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Abbiamo dimostrato che

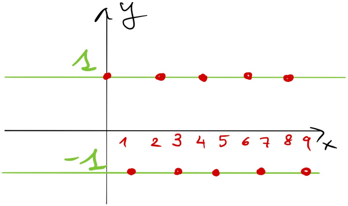
$$a_n \to L \in \mathbb{R} \implies a_n \text{ soddisfa la condizione di Cauchy}$$

quindi la condizione di Cauchy è **condizione necessaria** affinché una successione sia convergente.

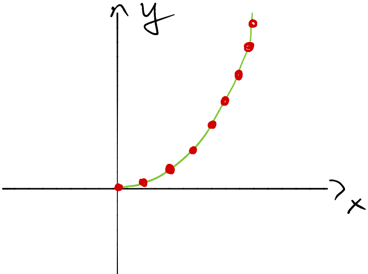
Esempi:

- $\{(-1)^n\}$ **NON** è di Cauchy.

:e:



- $\{n^2\}$ **NON** è di Cauchy.



La condizione di Cauchy è anche una **condizione sufficiente** per la convergenza di successioni? $\boxed{\text{SÌ}}$

Teorema (Criterio di Cauchy)

Una successione $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ converge se e solo se essa è di Cauchy.

Riformulazione della condizione di Cauchy

$\{a_n\}$ è di Cauchy

se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, : \; \forall \, n \geq n_0, \; \forall \, k \in \mathbb{N}^+ \quad |a_{n+k} - a_n| \leq \varepsilon.$$

Completezza di $\mathbb{R}$: il fatto che la condizione di Cauchy sia sufficiente per la convergenza di una successione è **equivalente** alla completezza di $\mathbb{R}$.

Una riformulazione della completezza di $\mathbb{R}$ è proprio: tutte le successioni reali di Cauchy sono convergenti.

$\mathbb{Q}$ non è completo. Infatti, in $\mathbb{Q}$ esistono successioni di Cauchy che **non convergono ad alcun limite $L \in \mathbb{Q}$.**
Per esempio, consideriamo

$$\{x_n\} \subseteq \mathbb{Q}, \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}.$$