Elementi di teoria degli insiemi

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Insieme:
È una collezione (famiglia/classe) di oggetti, detti elementi.

- Notazioni:
  - $x \in E$ significa: x appartiene ad E
  - $x \notin E$ significa: x non appartiene ad E
  - $\emptyset$: l'insieme vuoto (l'insieme che non ha alcun elemento)

- Cardinalità di un insieme = numero dei suoi elementi

- Due diversi modi di descrivere gli insiemi:
  - elencando tutti gli elementi

$$E = \{\cdots \text{lista di elementi di E, separati da virgole} \cdots\}$$

  - descrivendo un insieme come una famiglia di elementi verificanti una certa proprietà (<u>predicato</u>)

$$E = \{x \in U \,:\, \mathcal{P}(x) \text{ è vera}\}$$

    con U: insieme ambiente.

Inclusione fra insiemi

Un insieme F si dice sottoinsieme di E, scriviamo $F \subseteq E$, o $F \subset E$, se

ogni elemento di F è un elemento anche di E

cioè

$$\forall x \in F, \quad x \in E$$

Per es.: per ogni insieme E, si ha $\emptyset \subseteq E$, $E \subseteq E$. $\emptyset$ e E sono i sottoinsiemi impropri di E.

N.B.

$$E = F \Leftrightarrow E \subseteq F \text{ e } F \subseteq E$$

- **Inclusione stretta** $F \subsetneq E$ significa

$$F \subset E, \qquad \textbf{e} \quad F \neq E$$

Operazioni su insiemi:

A partire dagli insiemi A e B, si definisce

- l'*insieme unione*

$$\boxed{A \cup B := \{x : \quad x \in A \textbf{ o } x \in B\}}$$

- l'*insieme intersezione*

$$\boxed{A \cap B := \{x : \quad x \in A \textbf{ e } x \in B\}}$$

(se $A \cap B = \emptyset$, si dice che A e B sono disgiunti);

Operazioni su insiemi:

- l'*insieme differenza* (di A e B)

$$\boxed{A \setminus B := \{x : \quad x \in A \ \mathbf{e} \ x \notin B\}}$$

In particolare, se $B \subset A$, allora si usa la notazione

$$\boxed{B^c := A \setminus B = \{x : \, x \in A, \, x \notin B\}}$$

B^c è l'insieme complementare di B (in A)

Prodotto cartesiano di insiemi

Dati A e B, il <u>prodotto cartesiano</u> di A e B è l'insieme delle <u>coppie ordinate</u> (a, b), al variare di a in A e di b in B

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ \ b \in B\}$$

- l'<u>ordine</u> è essenziale

$$(a, b) = (a', b') \ \Leftrightarrow\ a = a' \textbf{ e } b = b'$$

- in generale, $A \times B \neq B \times A$
- si scrive A^2 invece di $A \times A$
- si estende il prodotto cartesiano a una n-upla di insiemi $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$, con $n \geq 2$, definendo

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \Big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \\ a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots,\ a_n \in A_n\Big\}$$

  Se $A_i \equiv A$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, si scrive

$$A \times A \times \ldots \times A = A^n$$