Scritto di Analisi Matematica B – 01.09.2022

Tempo a disposizione: 90 minuti

PARTE 1: ESERCIZI

Esercizio 1. Sia $\boxed{\alpha > 0}$. Si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{[\exp(|x|^\alpha) - |x|^\alpha - \cos(|x|^\alpha)] \cdot \sin(y^3)}{(\arctan(\sqrt{x^2+y^2}))^5} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

1. Per quali valori di $\alpha > 0$ f è continuo in $(0,0)$?
2. Calcolare $\nabla f(0,0)$ al variare di $\alpha > 0$.
3. Sia $\vec{v}$ un generico versore di $\mathbb{R}^2$. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ al variare di $\alpha > 0$.
4. Discutere la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha > 0$.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 2. Si consideri il campo scalare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \arctan(xy(x^2+y-2)) .$$

1. Calcolare tutti i suoi punti critici.
2. Classificare <u>solo</u> i punti critici giacenti su uno degli assi coordinati.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 3. Calcolare l'integrale curvilineo di *prima specie*

$$\int_\Gamma f \, \mathrm{d}s,$$

ove

$$f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}$$

e Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r} : [2,3] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r}(t) = (t, \log(t))$.

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 4. Sia C la porzione di corona circolare con centro in $(0,0)$ e raggi 1 e 2, contenuta nel semipiano $\{y \geq 0\}$ e posta al di sopra della bisettrice $y = x$. Si consideri il campo scalare $f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)^2$. Calcolare

$$\iint_C \|\nabla f(x,y)\|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y .$$

[Punteggio: 5 punti]

PARTE 2: QUESITI DI TEORIA

Esercizio 5.

(a) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare, e $\vec{x}_0 \in \Omega$. Dare la definizione del fatto che $\vec{x}_0$ è punto di massimo/minimo relativo ed enunciare il teorema di Fermat.

(b) Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.

(c) Enunciare il teorema di caratterizzazione dei campi conservativi.

(d) Dimostrare, a scelta, uno dei teoremi ai punti (a) e (b), oppure una parte del teorema al punto (c).

[Punteggio: 9 punti]

REGOLE: la prova è superata se sono verificate ***entrambe*** le condizioni:

1. Nella parte 1 si consegue un punteggio maggiore o uguale a 11;
2. Il punteggio totale (parte 1+parte 2) è maggiore o uguale a 18.