Scritto di Analisi Matematica B – 04.07.2022

Tempo a disposizione: 90 minuti

PARTE 1: ESERCIZI

Esercizio 1. Sia $\boxed{\alpha > 0}$. Si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{[\arctan(|xy|)]^\alpha}{\sin^2(x) + 2\sin^2(y)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Per quali valori di $\alpha > 0$ f è continuo in $(0,0)$?
2. Calcolare $\nabla f(0,0)$ al variare di $\alpha > 0$.
3. Sia $\vec{v}$ un generico versore di $\mathbb{R}^2$. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ al variare di $\alpha > 0$.
4. Discutere la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha > 0$.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 2. Calcolare e classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 1 + (x+y)^2$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 3. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x,y) = \left(y \log\left(\frac{y}{x}\right) - y\right)\vec{i} + \left(x \log\left(\frac{y}{x}\right) + x\right)\vec{j}\,.$$

Calcolare

$$\int_\Gamma \vec{F},$$

ove Γ è la semicirconferenza di centro $(3,1)$ e raggio 2, posta al di sopra della retta $y = 1$ e orientata in senso antiorario.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 4. Sia D la regione compresa fra il grafico della funzione $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ e l'asse delle x. Calcolare

$$\iint_D x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Suggerimento: esplicitare l'espressione di D in modo da applicare opportunamente la formula di riduzione....

[Punteggio: 5 punti]

PARTE 2: QUESITI DI TEORIA

Esercizio 5.

(a) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare, e $\vec{x}_0 \in \Omega$. Dare la definizione del fatto che $\vec{x}_0$ è punto di massimo/minimo relativo ed enunciare il teorema di Fermat.

(b) Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.

(c) Enunciare il teorema di caratterizzazione dei campi conservativi.

(d) Dimostrare, a scelta, uno dei teoremi ai punti (a) e (b), oppure una parte del teorema al punto (c).

[Punteggio: 9 punti]

REGOLE: la prova è superata se sono verificate ***entrambe*** le condizioni:

1. Nella parte 1 si consegue un punteggio maggiore o uguale a 11;
2. Il punteggio totale (parte 1+parte 2) è maggiore o uguale a 18.