Scritto di Analisi Matematica B – 06.09.2021

Tempo a disposizione: 90 minuti

PARTE 1: ESERCIZI

Esercizio 1. Sia $\tilde{y}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'' + 2y' - 3y &= e^x \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Calcolare $\tilde{y}(-1)$.
[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\left[e^{|x|} - 1 - \log(1+|x|)\right]^{2\alpha-1}}{\arctan(x^2+y^2)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Per quali valori di α f è continuo in $(0,0)$?
2. Calcolare $\nabla f(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Per $v \neq \overrightarrow{e}_1$ e $v \neq \overrightarrow{e}_2$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Discutere la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 3. Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \arctan(xy^2)$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D x^2(1+4x^2+4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 2, \ x \geq 0\}.$$

[Punteggio: 5 punti]

PARTE 2: QUESITI DI TEORIA

Esercizio 5.

(a) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare, e $x_0 \in \Omega$. Dare la definizione del fatto che x_0 è punto di massimo/minimo relativo.

(b) Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.

(c) Dare le definizioni di campo conservativo e irrotazionale. Enunciare il teorema di caratterizzazione dei campi conservativi (detto anche 'teorema di equivalenza delle tre condizioni').

(d) Dimostrare, a scelta, uno dei suddetti teoremi.

(e) Siano dati $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, e $(x_0, y_0) \in \Omega$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le proprie risposte:

1. se f è differenziabile in (x_0, y_0), allora le funzioni $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono definite in un intorno di (x_0, y_0) ed ivi continue;
2. se f è differenziabile in (x_0, y_0) e non ha in (x_0, y_0) un punto di estremo relativo, allora $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

[Punteggio: 9 punti]

REGOLE: la prova è superata se sono verificate ***entrambe*** le condizioni:

1. Nella parte 1 si consegue un punteggio maggiore o uguale a 11;
2. Il punteggio totale (parte 1+parte 2) è maggiore o uguale a 18.