

Scritto di Analisi Matematica B – 10.01.2023

Tempo a disposizione: 90 minuti

PARTE 1: ESERCIZI

Esercizio 1. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$(1+x^2)y' + \frac{1}{\arctan(x)}y = x^3 + x$$
$$y(\tan(1)) = 0$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Sia $\alpha > 0$ e si consideri il campo scalare

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(\cos(\sqrt{2}|x|^{3/2}) - 1) \sin(|y|^{3\alpha})}{(\sqrt{x^2 + y^2})^8} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

1. Per quali valori del parametro α il campo f è continuo in $(0, 0)$?
2. Calcolare $\nabla f(0, 0)$ al variare di α .
3. Per quali valori del parametro α il campo f è differenziabile in $(0, 0)$?
4. Sia $v = (v_1, v_2)$ un generico versore di \mathbb{R}^2 . Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ al variare di $\alpha > 0$.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 3. Calcolare i punti e i valori di estremo assoluto del campo scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x, y) = \exp\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)$$

sul trapezio T definito da

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 3 - x \leq y \leq 4 - x\}.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 4. Si consideri il campo $\vec{F} : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dato da

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{2x + 7y}{x^2 + y^2 + 7xy + 1} + e^y + ye^x \right) \vec{i} + \left(\frac{7x + 2y}{x^2 + y^2 + 7xy + 1} + xe^y + e^x \right) \vec{j}.$$

Sia Γ l'arco di parabola $y = x^2$ con $x \in [0, 1]$. Calcolare

$$\int_{\Gamma} \vec{F}.$$

[Punteggio: 6 punti]

PARTE 2: QUESITI DI TEORIA

Esercizio 5.

- (a) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo scalare, e $\vec{x}_0 \in \Omega$. Dare la definizione del fatto che \vec{x}_0 è punto di massimo/minimo relativo ed enunciare il teorema di Fermat.
- (b) Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.
- (c) Enunciare il teorema di caratterizzazione dei campi conservativi.
- (d) Dimostrare, a scelta, uno dei teoremi ai punti (a) e (b), oppure una parte del teorema al punto (c).

[Punteggio: 9 punti]

REGOLE: la prova è superata se sono verificate *entrambe* le condizioni:

1. Nella parte 1 si consegue un punteggio maggiore o uguale a 11;
2. Il punteggio totale (parte 1+parte 2) è maggiore o uguale a 18.