Scritto di Analisi Matematica B – 11.01.2022

Tempo a disposizione: 90 minuti

PARTE 1: ESERCIZI

Esercizio 1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^4 u'(x) + x^3 u(x) = \log(2x), & x \in (0, +\infty), \\ u(1) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log\left(\cos^2(xy) + (xy)^4\right)}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Per quali valori di α il campo f è continuo in $(0,0)$?
2. Calcolare $\nabla f(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Per $v \neq \vec{e}_1$ e $v \neq \vec{e}_2$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Discutere la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 3. Calcolare i punti e i valori di estremo assoluto della funzione

$$f(x,y) = \arctan(x - y^2)$$

sul triangolo di vertici $(-1,0)$, $(2,0)$, e $(0,1)$.

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 4. Sia Γ la curva piana di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = \left(e^t + e^{-t}\ ,\ e^t - e^{-t}\right) \qquad t \in [-1,1].$$

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s\,.$$

[Punteggio: 5 punti]

PARTE 2: QUESITI DI TEORIA

Esercizio 5.

(a) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare, e $x_0 \in \Omega$. Dare la definizione del fatto che x_0 è punto di massimo/minimo relativo ed enunciare il criterio della matrice hessiana.

(b) Enunciare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.

(c) Dare le definizioni di campo conservativo e irrotazionale. Enunciare i teoremi sui rapporti fra conservatività e irrotazionalità.

(d) Dimostrare, a scelta, uno dei teoremi ai punti (b) e (c).

(e) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$. Sia $C \subset A$ una corona circolare. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

1. Se F è conservativo in A, allora
$$\iint_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = 0.$$
2. Se F è irrotazionale in C, allora F è conservativo in C.

[Punteggio: 9 punti]

REGOLE: la prova è superata se sono verificate ***entrambe*** le condizioni:

1. Nella parte 1 si consegue un punteggio maggiore o uguale a 11;
2. Il punteggio totale (parte 1+parte 2) è maggiore o uguale a 18.