Scritto di Analisi Matematica B – 12.04.2022

Tempo a disposizione: 90 minuti

PARTE 1: ESERCIZI

Esercizio 1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{[\exp(7\arctan(x)) - 1]\, x \log(1+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

1. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ f è continuo in $(0,0)$?
2. Calcolare $\nabla f(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Discutere la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Per $\vec{v} \neq \overrightarrow{e}_1$ e $\vec{v} \neq \overrightarrow{e}_2$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutere la validità della formula
$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$$
al variare di $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 2. Determinare i punti di estremo relativo della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \exp\left(x^3 - 4x^2 + 4x\right) + \log(1+y^2) - 6\arctan(y)\,.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 3. Sia $\Gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ la curva di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = \left(\log(1+t^2), 2\sqrt{1+t^2}\,\right), \qquad t \in [-1,1]$$

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma y^2\, ds\,.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 4. Calcolare

$$\iint_A \frac{xy}{3+(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

ove A è il quarto del disco di centro $(0,0)$ e raggio 1, contenuto nel primo quadrante e posto al di sopra della retta $y = x$.

[Punteggio: 5 punti]

PARTE 2: QUESITI DI TEORIA

Esercizio 5.

(a) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una data funzione. Sia $\vec{x}_0 \in \Omega$. Definire la proprietà *f è continua in $\vec{x}_0$*. Enunciare il teorema sui rapporti fra differenziabilità e continuità.

(b) Dare la definizione di campo conservativo. Enunciare il teorema di caratterizzazione dei campi conservativi.

(c) Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.

(d) Dimostrare, a scelta, uno dei suddetti teoremi.

[**Punteggio: 9 punti**]

REGOLE: la prova è superata se sono verificate ***entrambe*** le condizioni:

1. Nella parte 1 si consegue un punteggio maggiore o uguale a 11;
2. Il punteggio totale (parte 1+parte 2) è maggiore o uguale a 18.