Scritto di Analisi Matematica B – 13.06.2022

Tempo a disposizione: 90 minuti

PARTE 1: ESERCIZI

Esercizio 1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\exp(x^2+4x^2y^2)+\cos(\sqrt{2}x+2xy)-2}{(\arctan(x^2+y^2))^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ f è continuo in $(0,0)$?
2. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ (*prestare attenzione agli sviluppi di Taylor!*).
3. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Discutere la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[**Punteggio: 6 punti**]

Esercizio 2. Calcolare i punti di minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = \exp\left(x^2-2x+y^2+4y+5\right)$$

sul rettangolo

$$R = [2,5] \times [-3,-1]$$

***Suggerimento**: completare i quadrati nell'argomento di* exp...
[**Punteggio: 5 punti**]

Esercizio 3. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{1}{1+y^2} + 3x^2\sin(\log(1+y^4)) - \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\right)\vec{i} + \left(\frac{4x^3y^3}{1+y^4}\cos(\log(1+y^4)) - \frac{2xy}{(1+y^2)^2}\right)\vec{j}.$$

Delle seguenti affermazioni:

1. Sia $B_1(0)$ la palla centro $(0,0)$ e raggio 1. Si ha

$$\iint_{B_1(0)} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 6$$

2. $\vec{F}$ è conservativo, e il campo scalare $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dato da

$$\varphi(x,y) = \frac{x}{1+y^2} + x^3\sin(\log(1+y^4)) + \arctan(\cos(x)) + 5$$

   è un suo potenziale;

3. l'integrale curvilineo di $\vec{F}$ lungo l'ellisse di equazione

$$(x-\pi)^2 + 4(y-1)^2 = 1,$$

   percorso una sola volta in senso antiorario, vale 2π;

4. date le curve γ e $\tilde{\gamma}$ di rappresentazioni parametriche

$$\vec{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}(t) = (t, t^2) \ \forall\, t \in [0,1],$$
$$\vec{\tilde{r}} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\tilde{r}}(t) = (t, t^3) \ \forall\, t \in [0,1],$$

si ha che

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F};$$

5. l'integrale curvilineo di $\vec{F}$ lungo la curva γ di rappresentazione parametrica

$$\vec{r} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{r}(t) = \left(\exp(\sin(t)), \frac{2\cos(t)}{1+\cos^2(t)}\right) \ \forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

vale

$$e + \arctan(\cos(e)) - \frac{1}{2} - \sin(\log(2)) - \arctan(\cos(1));$$

tutte e sole quelle corrette sono... **Giustificare accuratamente ogni risposta**.
[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{\exp(\arctan(x^2+y^2))}{1+(x^2+y^2)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le x^2+y^2 \le 4, \ -|x| \le y \le |x|\}.$$

[Punteggio: 5 punti]

PARTE 2: QUESITI DI TEORIA

Esercizio 5.

(a) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una data funzione. Sia $\vec{x}_0 \in \Omega$. Definire la proprietà f *è differenziabile in* $\vec{x}_0$. Enunciare il teorema sui rapporti fra differenziabilità e esistenza delle derivate parziali e direzionali.

(b) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare, e $\vec{x}_0 \in \Omega$. Dare la definizione del fatto che $\vec{x}_0$ è punto di massimo/minimo relativo ed enunciare il teorema di Fermat.

(c) Enunciare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.

(d) Dimostrare, a scelta, uno dei suddetti teoremi.

[Punteggio: 9 punti]

REGOLE: la prova è superata se sono verificate ***entrambe*** le condizioni:

1. Nella parte 1 si consegue un punteggio maggiore o uguale a 11;
2. Il punteggio totale (parte 1+parte 2) è maggiore o uguale a 18.