Scritto di Analisi Matematica B – 14.06.2021

Tempo a disposizione: 90 minuti

PARTE 1: ESERCIZI

Esercizio 1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(e^{|x|}-1)\sin(x^2+y^2)}{|y|^\alpha \arctan(\sqrt{x^2+y^2})} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}.$$

1. Per quali valori di α f è continuo in $(0,0)$?
2. Calcolare $\nabla f(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Per $v \neq \overrightarrow{e}_1$ e $v \neq \overrightarrow{e}_2$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Discutere la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[**Punteggio: 6 punti**]

Esercizio 2. Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = \arctan\left(x^2 + 2\alpha xy + 4y^2\right)$$

al variare del parametro $\alpha \geq 0$.
[**Punteggio: 5 punti**]

Esercizio 3. Si consideri il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(3x^2\cos(x^3)\exp(\sin(x^3))y + 3x^2\arctan(y^2)\right)\overrightarrow{i} + \left(\exp(\sin(x^3)) + \frac{2x^3y}{1+y^4}\right)\overrightarrow{j}.$$

Determinare $\mathrm{dom}(\overrightarrow{F})$. Delle seguenti affermazioni:

1. L'integrale curvilineo $\int_\gamma \overrightarrow{F}$, ove γ è il segmento congiungente il punto $((\pi/2)^{1/3}, 1/2)$ al punto $(\pi^{1/3}, 1)$, vale
$$1 + \frac{\pi^2}{4} - \frac{e}{2} - \frac{\pi}{2}\arctan\left(\frac{1}{4}\right)$$
2. $\iint_{B_1(0)} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 6$ (con $B_1(0)$ la palla aperta di centro $(0,0)$ e raggio unitario);
3. $\overrightarrow{F}$ è irrotazionale;
4. $\overrightarrow{F}$ è conservativo e il campo scalare
$$\varphi(x,y) = \exp(\sin(x^3))y + x^3\arctan(y^2) + 5$$
definito sul suo dominio naturale, è un potenziale per $\overrightarrow{F}$;
5. La circuitazione di $\overrightarrow{F}$ lungo l'ellisse di centro $(0,2)$ e semiassi $a = \frac{1}{2}$ e $b = 3$, percorsa in senso orario, è uguale a 4π

tutte e sole quelle corrette sono... **Giustificare accuratamente ogni risposta**.
[**Punteggio: 6 punti**]

Esercizio 4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \big(\exp(y^3)\sin(x^5\log(1+y^2)) + x^2 y\big)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \le 1,\ y \ge \sqrt{3}|x|\}\,.$$

[**Punteggio: 5 punti**]

PARTE 2: QUESITI DI TEORIA

Esercizio 5.

(a) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare, e $x_0 \in \Omega$. Dare la definizione del fatto che x_0 è punto di massimo/minimo relativo.

(b) Enunciare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.

(c) Dare le definizioni di campo conservativo e irrotazionale. Enunciare i teoremi sui rapporti fra conservatività e irrotazionalità.

(d) Dimostrare, a scelta, uno dei suddetti teoremi.

(e) Siano dati $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, e $(x_0,y_0,z_0) \in \Omega$. Sia f continua in (x_0,y_0,z_0). Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le proprie risposte:

1. se $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ per $v = \big(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0\big)$, allora f non è differenziabile in (x_0,y_0,z_0);
2. se f è di classe C^2 in un intorno di (x_0,y_0,z_0) e gli autovalori di $H_f(x_0,y_0,z_0)$ verificano $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$, allora il test della matrice Hessiana è inefficace.

[**Punteggio: 9 punti**]

REGOLE: la prova è superata se sono verificate ***entrambe*** le condizioni:

1. Nella parte 1 si consegue un punteggio maggiore o uguale a 11;
2. Il punteggio totale (parte 1+parte 2) è maggiore o uguale a 18.