# Scritto di Analisi Matematica B – 19.12.2022

**Tempo a disposizione: 90 minuti**

---

## PARTE 1: ESERCIZI

---

**Esercizio 1.** Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{gathered} y' + \frac{1}{x} y = \exp(2x^2) \\ y(1) = \frac{1}{6} \end{gathered}$$

**[Punteggio: 5 punti]**

**Esercizio 2.** Si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5(x^2+6y^2)\sin(x^2-y^2)}{3(x^2+y^2)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

1. Il campo $f$ è continuo in $(0,0)$?
2. Calcolare $\nabla f(0,0)$.
3. Il campo $f$ è differenziabile in $(0,0)$?

**[Punteggio: 6 punti]**

**Esercizio 3.** Determinare i punti di estremo relativo per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data

$$f(x,y) = \exp(x^2) + \exp\left(\frac{y^3}{3} - 4y\right) .$$

**[Punteggio: 5 punti]**

**Esercizio 4.** Sia

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\} .$$

Calcolare

$$\iint_D \frac{|y| \exp(\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y .$$

**[Punteggio: 6 punti]**

## PARTE 2: QUESITI DI TEORIA

**Esercizio 5.**

(a) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare, e $\vec{x}_0 \in \Omega$. Dare la definizione del fatto che $\vec{x}_0$ è punto di massimo/minimo relativo ed enunciare il teorema di Fermat.

(b) Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.

(c) Enunciare il teorema di caratterizzazione dei campi conservativi.

(d) Dimostrare, a scelta, uno dei teoremi ai punti (a) e (b), oppure una parte del teorema al punto (c).

**[Punteggio: 9 punti]**

---

**REGOLE:** la prova è superata se sono verificate ***entrambe*** le condizioni:

1. Nella parte 1 si consegue un punteggio maggiore o uguale a 11;
2. Il punteggio totale (parte 1+parte 2) è maggiore o uguale a 18.