# Scritto di Analisi Matematica B – 30.01.2023

**Tempo a disposizione: 90 minuti**

---

## PARTE 1: ESERCIZI

---

**Esercizio 1.** Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x-y) - 1 + \sin\left(\dfrac{1}{2}(x+y)^2\right)}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

1. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $f$ è continuo in $(0,0)$?
2. Calcolare $\nabla f(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Per quali valori del parametro $\alpha$ il campo $f$ è differenziabile in $(0,0)$?
4. Sia $v = (v_1, v_2)$ un generico versore di $\mathbb{R}^2$. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**[Punteggio: 6 punti]**

**Esercizio 2.** Calcolare i punti e i valori di estremo assoluto del campo scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x,y) = \exp\left(x^2 + y^2\right) + 1$$

sul dominio $T$ definito da

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 3 - x \leq y \leq 6 - x, \quad \frac{1}{2}x \leq y \leq 2x\} .$$

**[Punteggio: 5 punti]**

**Esercizio 3.** Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} = F_1\,\vec{i} + F_2\,\vec{j} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$\begin{aligned} \vec{F}(x,y) = {} & \left(2x\cos(x^2)\exp(\sin(x^2))\log(1+\arctan(y^4)) - 3x^2\sin(x^3-y^2)\right)\vec{i} \\ & + \left(\frac{4y^3}{(1+y^8)(1+\arctan(y^4))}\exp(\sin(x^2)) + 2y\sin(x^3-y^2)\right)\vec{j}. \end{aligned}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) $\vec{F}$ non è conservativo

(b) $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma = 3\pi$, dove $\Gamma$ è la circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 7 percorsa una volta in senso antiorario

(c) il campo scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definito da

$$\varphi(x,y) = \exp(\sin(x^2))\log(1+\arctan(y^4)) + \cos(x^3-y^2) + 5$$

è un potenziale per $\vec{F}$

(d) si ha

$$\iint_{[1,2]\times[2,3]} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = 0$$

(e) se $\Gamma$ è il segmento congiungente $(0,1)$ a $(1,0)$, si ha

$$\int_\Gamma \vec{F}\, d\Gamma = -\log(1 + \tfrac{\pi}{4})$$

tutte e sole quelle corrette sono

**[Punteggio: 6 punti]**

**Esercizio 4.** Calcolare

$$\iint_A (4y^2 - 4x^2)\, dxdy$$

con

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \le 3,\ y - x \ge 0, y + x \le 0\}.$$

---

## PARTE 2: QUESITI DI TEORIA

---

**Esercizio 5.**

(a) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare, e $\vec{x}_0 \in \Omega$. Dare la definizione del fatto che $\vec{x}_0$ è punto di massimo/minimo relativo ed enunciare il teorema di Fermat.

(b) Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.

(c) Enunciare il teorema di caratterizzazione dei campi conservativi.

(d) Dimostrare, a scelta, uno dei teoremi ai punti (a) e (b), oppure una parte del teorema al punto (c).

**[Punteggio: 9 punti]**

---

**REGOLE:** la prova è superata se sono verificate ***entrambe*** le condizioni:

1. Nella parte 1 si consegue un punteggio maggiore o uguale a 11;
2. Il punteggio totale (parte 1+parte 2) è maggiore o uguale a 18.