Integrali doppi – Cambiamenti di variabile

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi Matematica B

Cambiamento di variabili

Definizione (Cambiamento di variabili)

Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ due aperti. Diciamo che $G : V \to U$ è un cambiamento di variabili di classe C^1 tra U e V se $G \in C^1(V)$, G è invertibile con $G^{-1} : U \to V$ di classe C^1.

- Interpretazione: passiamo dalle coordinate $(x, y) \in U$ alle nuove coordinate $(u, v) \in V$ definite da

$$x = G_1(u, v), \qquad y = G_2(u, v).$$

Jacobiano

Definizione (Jacobiano di un cambio di variabili)

Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ *due aperti e sia* $G : V \to U$ *un cambiamento di variabili di classe* C^1*. Chiamiamo* **jacobiano di** G *l'applicazione* $J_G : V \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$J_G(u,v) = \det \begin{pmatrix} \partial_u G_1(u,v) & \partial_v G_1(u,v) \\ \\ \partial_u G_2(u,v) & \partial_v G_2(u,v) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Teorema (Cambiamento di variabili)

Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ due aperti e sia $G : V \to U$ un cambiamento di variabili di classe C^1. Sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $\Omega \subset U$ un insieme di Jordan. Allora $G^{-1}(\Omega)$ è di Jordan e vale

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{G^{-1}(\Omega)} f(G_1(u,v), G_2(u,v))\,|J_G(u,v)|\,du\,dv \qquad (2)$$

- L'insieme $G^{-1}(\Omega)$ è la controimmagine di Ω tramite l'appiczione G :

$$G^{-1}(\Omega) = \{(u,v) \in V \,:\; G(u,v) \in \Omega\}.$$

Confronto con la formula di cambiamento di variabile per integrali in una variabile

Coordinate polari

Sono le coordinate $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ definite dal cambio di variabili

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Quindi $u = r$, $v = \theta$, $G_1(r, \theta) = r\cos\theta$ e $G_2(r, \theta) = r\sin\theta$. Calcoliamo lo jacobiano:

Esempio 1: Consideriamo l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy,$$

dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Esempio 2: Consideriamo l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy,$$

dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \leq 4, \; 0 \leq y\}.$$

Coordinate polari generalizzate

Sono le coordinate $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ definite dal cambio di variabili

$$x = a\, r \cos\theta, \qquad y = b\, r \sin\theta, \qquad a, b > 0.$$

Quindi $u = r$, $v = \theta$, $G_1(r, \theta) = ar\cos\theta$ e $G_2(r, \theta) = br\sin\theta$.

Calcoliamo lo jacobiano:

Esempio: Calcoliamo l'area dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$