Campi conservativi

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi Matematica B

Premessa

Campi conservativi e potenziali

Definizione (Campo conservativo)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto e sia* $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un campo vettoriale. Diciamo che*

- F *è* **conservativo**
- *O che* F *ammette potenziale*
- *O che* F *è un gradiente*

se esiste un campo scalare $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ *differenziabile tale che*

$$F(x) = \nabla\phi(x) \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

In tal caso chiamiamo il campo ϕ *UN* **potenziale** *di* F.

Esempio

Il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dato da*

$$F(x,y) = (y,x)$$

è conservativo.

Esempio

Il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dato da*

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2} \, , \, \frac{2y}{1+x^2+y^2} \right)$$

è conservativo.

Non unicità del potenziale..

Obiettivo & piano di battaglia

Obiettivo & piano di battaglia

Obiettivo & piano di battaglia

Il problema della esistenza di un potenziale & il problema della primitiva

Definizione (Insiemi connessi per archi)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. *Diciamo che* Ω *è* **connesso per archi** *se per ogni* $p, q \in \Omega$ *esiste una curva* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *tale che* $\gamma([a, b]) \subset \Omega$ *e tale che*

$$\gamma(a) = p \qquad e \qquad \gamma(b) = q.$$

Esempio

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

è connesso per archi.

Esempio

Insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$$

non è connesso per archi.

Altri esempi..

In analogia con la teoria degli integrali indefiniti vale il seguente risultato:

Teorema (Potenziali su insiemi connessi per archi differiscono per una costante)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *connesso per archi e sia* $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un campo conservativo. Siano* ϕ *e* ψ *due potenziali di* F*. Allora esiste una costante* $c \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\phi - \psi = c.$$

Corollario

Teorema (Teorema di struttura dell'insieme dei potenziali)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *connesso per archi e sia* $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un campo conservativo. Siano* ϕ *e* ψ *due potenziali di* F*. Allora l'insieme di tutti i potenziali di* F *è dato da*

$$\{\phi + c \ : \ c \in \mathbb{R}\},$$

dove $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ *è un particolare potenziale.*

Dimostrazione del Teorema: Potenziali su insiemi connessi per archi differiscono per una costante

Premessa: la dimostrazione si basa su una estensione della formula per la derivazione della funzione composta.

Derivazione della funzione composta

Un caso particolare della formula della derivata della funzione composta

Lemma

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto e sia* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *un intervallo. Siano* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *e* $g : [a, b] \to \Omega$ *due funzioni differenziabili. Allora per ogni* $t \in (a, b)$ *vale*

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t).$$

Corollario

Teorema (Secondo teorema fondamentale del calcolo per integrali curvilinei)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per archi e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo conservativo continuo. Sia ϕ un potenziale di F e siano $p, q \in \Omega$. Allora si ha

$$\int_\gamma F = \phi(q) - \phi(p).$$

per ogni curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ regolare a tratti e tale che $\gamma([a, b]) \subset \Omega$ e $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$.

Dimostrazione

Osservazioni

Teorema (**Caratterizzazione di campi conservativi**)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per archi. Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Allora le seguenti proprietà di F sono equivalenti:

1. *F è conservativo.*
2. *L'integrale curvilineo di F è indipendente dalla traiettoria e dipende solo dagli estremi della curva, cioè, se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $r : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ sono due curve regolari a tratti a valori in Ω e tali che*
$$\gamma(a) = r(c) \qquad e \qquad \gamma(b) = r(d),$$
allora vale
$$\int_\gamma F = \int_r F.$$
3. *Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva chiusa regolare a tratti a valori in Ω, allora*
$$\oint_\gamma F = 0.$$

Osservazioni

Dimostrazione

L'implicazione $(2) \Rightarrow (1)$ è una conseguenza del

Teorema (Primo teorema fondamentale del calcolo per integrali curvilinei)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per archi e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo conservativo continuo. Supponiamo che F "abbia integrali curvilinei indipendenti dalla traiettoria".[a] Sia $p \in \Omega$ un punto fissato arbitrariamente, e definiamo un campo scalare $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ in questo modo: per ogni $q \in \Omega$, poniamo

$$\phi(q) := \int_\gamma F$$

ove γ è una (qualsiasi) curva regolare a tratti congiungente p a q. Allora, ϕ è differenziabile su Ω e vale

$$\nabla\phi(q) = F(q) \quad \forall\, q \in \Omega.$$

Infatti, $\phi \in C^1(\Omega)$.

[a] N.B. Questa proprietà è stata formalizzata rigorosamente qualche slide fa..

Campi irrotazionali

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto e sia* $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un campo vettoriale di classe* $C^1(\Omega)$. *Diciamo che* F *è* **irrotazionale** *se per ogni* $x \in \Omega$ *e per ogni* $j, k = 1, \ldots, n$ *vale*

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x) \tag{1}$$

- La proprietà (1) viene anche chiamata **l'uguaglianza delle derivate in croce**.

Teorema (I campi conservativi sono irrotazionali)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto e sia* $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un campo vettoriale di classe* $C^1(\Omega)$*. Se* F *è conservativo, allora* F *è anche irrotazionale.*

Dimostrazione

Non vale il viceversa del Teorema precedente, cioè non tutti i campi irrotazionali sono conservativi:

Esempio

Sia $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e sia* $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *un campo vettoriale definito da*

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

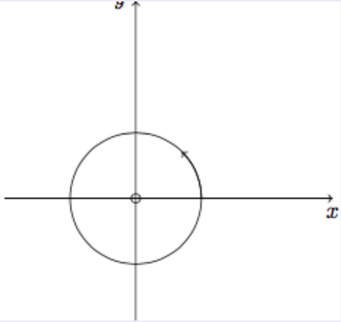
Allora F *è irrotazionale in* Ω*, cioè*

$$\partial_y F_1(x,y) = \partial_x F_2(x,y),$$

Esempio

Ma F non è conservativo in Ω. Infatti, se $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ è la circonferenza unitaria parametrizzata da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, allora si ha

$$\oint_\gamma F = 2\pi.$$



Da qui segue che F NON è conservativo in Ω: se lo fosse, l'integrale sarebbe nullo.

Quando irrotazionale $\Rightarrow$ conservativo?

Definizione

Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *is dice semplice se per ogni coppia di punti* $t_1,\ t_2 \in [a, b]$ *con* $t_1 \neq t_2$ *e almeno uno dei due interno ad* (a, b), *si ha* $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \boxed{\mathbb{R}^2}$ *un aperto connesso per archi. Diciamo che* Ω *è* **semplicemente connesso** *se per ogni curva chiusa e semplice* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *a valori in* Ω *vale che*

$$[\textit{regione delimitata da } \gamma] \subset \Omega$$

Esempi di insiemi semplicemente connessi

- Ogni insieme convesso in $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso.

Esempi di insiemi semplicemente connessi

- L'insieme $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è connesso per archi, ma non è semplicemente connesso.

Teorema

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *semplicemente connesso e sia* $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *un campo di classe* $C^1(\Omega)$. *Se* F *è irrotazionale, allora* F *è conservativo.*

Esempi

Potenziali

Dato un aperto Ω e un campo conservativo $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, come trovare un potenziale $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $F = \nabla\phi$?

- **Il metodo degli integrali indefiniti**.

Esempio 1: il campo $F(x,y) = (2x+y, x+2y)$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ e quindi anche conservativo ($\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso). Un suo potenziale $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deve soddisfare

$$\partial_x \phi(x,y) = 2x + y \tag{2}$$

$$\partial_y \phi(x,y) = x + 2y \tag{3}$$

Esempio 2: il campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato da

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2} \, , \, \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2} \right)$$

è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ e quindi anche conservativo. Un suo potenziale $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deve soddisfare

$$\partial_x \phi(x,y) = \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2} \tag{4}$$

$$\partial_y \phi(x,y) = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2} \tag{5}$$