

Integrali doppi

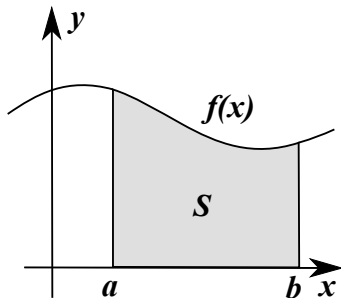
Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi Matematica B

Integreremo funzioni di 2 variabili su
regioni del piano $\mathbb{R}^2$

Motivazione per l'integrale di Riemann: calcolo di un'area



<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/02/Integral...>

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è
integrabile secondo
Riemann, e
 $f \geq 0$, allora

$\int_a^b f(x) dx = \text{area}$
del sottografo
di f su $[a, b]$

Similmente, introdurremo una nozione
di integrale per funzioni di
2 variabili
che abbia un'interpretazione geometrica
(legata al calcolo di un volumi)
per $f \geq 0$

Motivazione per gli integrali doppi: calcolo di un volume

Data $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, introduciamo la
nozione di integrale di f su A avente questa
interpretazione

$f \geq 0$:

allora

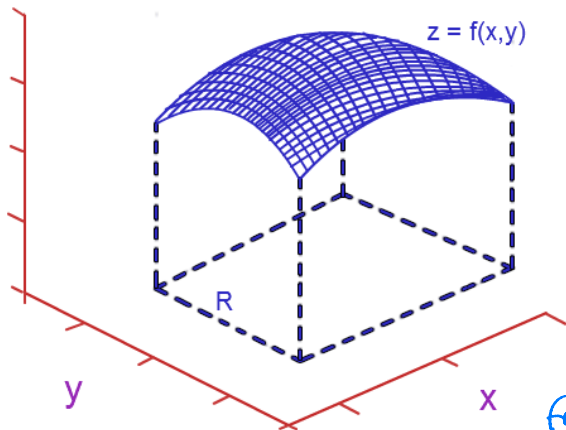
$$\int_A f(x,y) dx dy =$$

volume della

regione di

spazio compresa

fra $\text{graf}(f)$ e il
piano $z=0$



Diamo la definizione di
funzione integrabile, e la costruzione
dell'integrale (doppio) in 2
passi:

- 1) daremo ps. definizioni per funzioni
definite su RETTANGOLI
- 2) le estenderemo a insiemi più
general, detti "insiemi di Jordan"

Ricordiamo che un rettangolo è un
prodotto cartesiano di intervalli
limitati

$$(c \leq x \leq A = [a, b] \times [c, d])$$

Come per l'integrale di Riemann, lavoreremo sotto l'ipotesi di base che

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ sia LIMITATA

Definizione di integrale doppio

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Date due suddivisioni

$$D_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

← suddivisione di $[a, b]$

e

$$D_2 = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\}$$

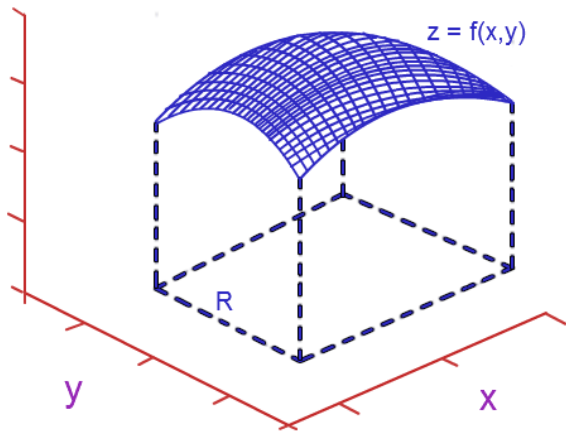
← suddivisione di $[c, d]$

di $[a, b]$ e $[c, d]$, chiamiamo **somma inferiore** e **somma superiore di f rispetto alla griglia $D_1 \times D_2$** le quantità

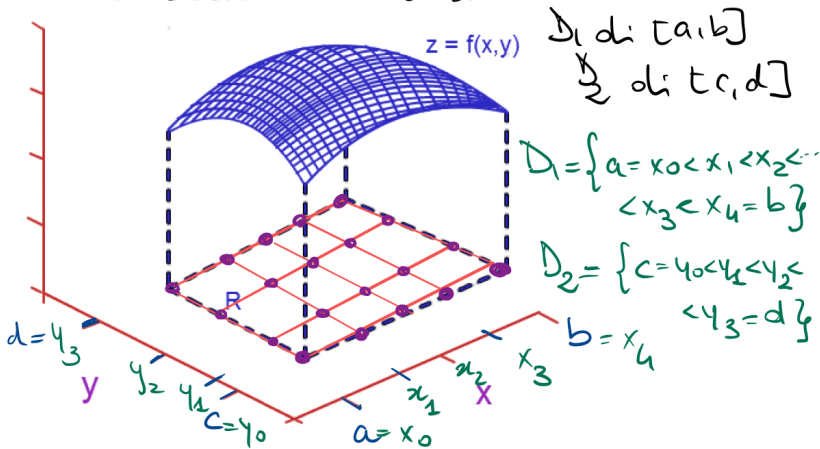
$$s(f, D_1 \times D_2) = \sum_{i,j} \left(\inf_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

e

$$S(f, D_1 \times D_2) = \sum_{i,j} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$



Visualizziamo una griglia $D_1 \times D_2$
 associata a 2 suddivisioni



La griglia suddivide R dominio in
 rettangoli

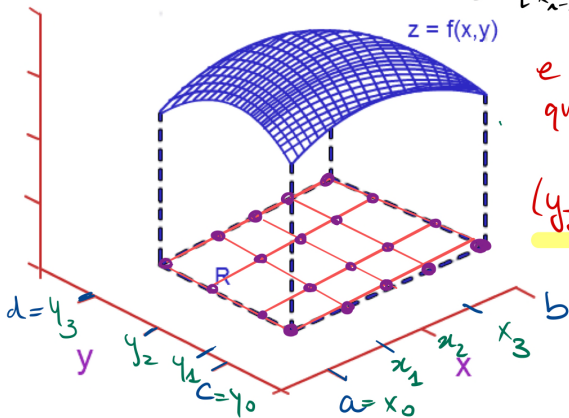
Il generico rettangolo associato alla griglia

$$\bar{e} [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

$$z = f(x, y)$$

e l'area di
questo rettangolo

$$\bar{e} \\ (y_j - y_{j-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

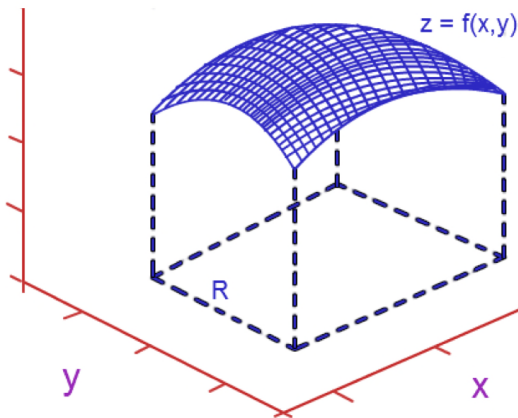


Nel caso $f \geq 0$, la quantità

$$\sum_{i,j} \left(\inf_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

è quindi il volume

del parallelepipedo
avente per
base il rettangolo

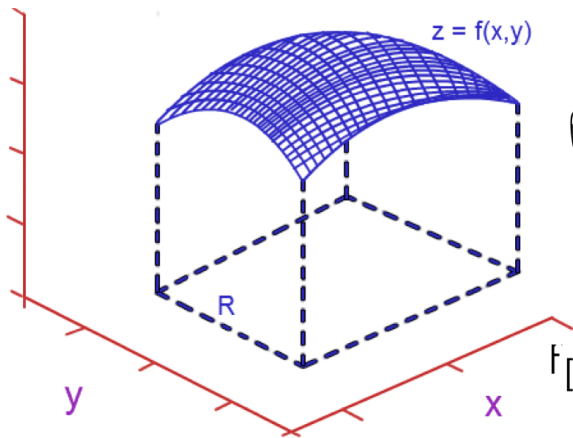


e avente per
altezza $\left(\inf_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f \right)$

Nel caso $f \geq 0$, la quantità

$\sum_{i,j} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ è quindi

il volume
del
parallelepipedo
avente per
base il
rettangolo



e avente per altezza

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f$$

Quindi, nel caso $f \geq 0$, la somma inferiore e la somma superiore si interpretano così:

$$\triangleright s(f, D_1 \times D_2) =$$

$$\sum_{i,j} \left(\inf_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

è la somma, su tutti i rettangoli associati alla griglia, dei volumi dei parallelepipedi aventi come base i rettangoli e come altezze l'estremo inferiore di f su tali rettangoli

$$\triangleright S(f, D_1 \times D_2) =$$

$$\sum_{i,j} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

è la somma, su tutti i rettangoli associati alla griglia, dei volumi dei parallelepipedi aventi come base i rettangoli e come altezze l'estremo superiore di f su tali rettangoli

Se f non è positiva, cade questa interpretazione geometrica, ma

► $s(f, D_1 \times D_2) =$

► $\sum_{i,j} \left(\inf_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

queste quantità sono comunque ben definite grazie all'ipotesi che f sia limitata.

► $S(f, D_1 \times D_2) =$

► $\sum_{i,j} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

Chiamiamo inoltre i valori

► $I(f) = \sup_{D_1, D_2} s(f, D_1 \times D_2)$

► $J(f) = \inf_{D_1, D_2} S(f, D_1 \times D_2)$

l'integrale inferiore e l'integrale superiore di f .

Chiamiamo inoltre i valori

► $I(f) = \sup_{D_1, D_2} s(f, D_1 \times D_2) = \text{l'estremo superiore}$
delle somme inferiori di f relative alla
griglia $D_1 \times D_2$, al variare di tutte
le suddivisioni D_1 di $[a, b]$, D_2 di $[c, d]$

► $J(f) = \inf_{D_1, D_2} S(f, D_1 \times D_2) = \text{l'estremo inferiore}$
delle somme superiori di f relative alla
griglia $D_1 \times D_2$, al variare di tutte le
suddivisioni D_1 di $[a, b]$ e D_2 di $[c, d]$.

l'integrale inferiore e l'integrale superiore di f .

Chiamiamo inoltre i valori

► $I(f) = \sup_{D_1, D_2} s(f, D_1 \times D_2)$ $\uparrow$ può essere pensato
= limite $s(f, D_1 \times D_2)$

all'infittirsi delle suddivisioni
 D_1 e D_2

► $J(f) = \inf_{D_1, D_2} S(f, D_1 \times D_2)$ $\uparrow$ può essere pensato
= limite $S(f, D_1 \times D_2)$

all'infittirsi delle suddivisioni
 D_1 e D_2

l'integrale inferiore e l'integrale superiore di f .

Dalla definizione segue che

$$I(f) \leq J(f).$$

Questo vale per ogni funzione
 f LIMITATA. La limitatezza è
infatti l'ipotesi di base che dà
senso a tutte queste costruzioni!

Definizione (Funzioni integrabili e integrale doppio)

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Diciamo che f è integrabile secondo Riemann se $I(f) = J(f)$. Tale valore si indica con

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy,$$

e si dice integrale doppio di f su A .

OSSERVAZIONI

- 1) La limitatezza di f è un'ipotesi di base, senza la quale le costruzioni introdotte non hanno senso!

2) Invece, estenderemo le definizioni di funzione integrabile 2° Riemann e di integrale doppio a insiemi più generali dei rettangoli.

3) Perché abbiamo inizialmente confinato la discussione a funzioni definite su rettangoli?

Perché la costruzione di
somma inferiore e somma superiore
(e quindi di integrale inferiore e
integrale superiore) è l'estensione
BIDIMENSIONALE delle omonime
costruzioni viste per funzioni di
1 variabile, definite su INTERVALLI.
Quindi in $\mathbb{R}^2$ si ragiona su RETTANGOLI.

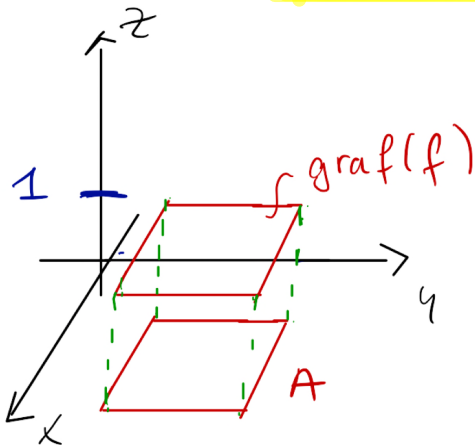
N.B.

4) La definizione di integrale data è tale che, se $f \geq 0$,

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \text{volume della regione di spazio fra } \text{graf}(f) \text{ e il piano } z=0$$

■ Per $f = 1$ si ha

$$\iint_A dx dy = \text{area}(A).$$



volume del
sottografo
di $f =$

volume del
parallelepipedo
avente come base
 A e come altezza
 $1 = \text{area}(A)$

Teorema (Le funzioni continue sono integrabili)

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.
Allora f è integrabile secondo Riemann.

Così vale l'analogo del risultato
visto per funz. di 1 VARIABLE.

Le proprietà che ora vedremo sono
ANALOGHE a quelle dell'integrale
per funz. di 1 VARIABLE.

Teorema (Proprietà dell'integrale doppio)

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ e siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni integrabili. Allora valgono le seguenti proprietà:

1. **Linearità:** per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta

$$\iint_A (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \, dx \, dy = \alpha \iint_A f(x, y) \, dx \, dy + \beta \iint_A g(x, y) \, dx \, dy.$$

2. **Confronto:** se $f(x, y) \leq g(x, y)$ per ogni $(x, y) \in A$, si ha

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_A g(x, y) \, dx \, dy$$

3. **Confronto con il modulo:**

$$\left| \iint_A f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| \, dx \, dy.$$

Teorema (**Formule di riduzione per rettangoli**)

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile.

Supponiamo che per ogni $x \in [a, b]$ l'applicazione $y \mapsto f(x, y)$ sia integrabile su $[c, d]$. Allora si ha *la formula di riduzione*

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx. \quad (1)$$

rispetto alla variabile x

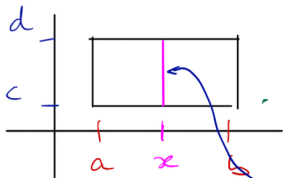
Analogamente, se per ogni $y \in [c, d]$ l'applicazione $x \mapsto f(x, y)$ è integrabile su $[a, b]$, allora si ha *la formula di riduzione*

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy. \quad (2)$$

rispetto alla variabile y

Interpretazione geometrica della formula di riduzione rispetto alla variabile x

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(\underline{x}, y) dy \right) dx$$



1) fisso $x \in [a, b]$ e considero

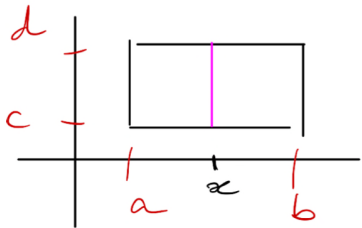
$y \mapsto f(x, y)$ su $[c, d]$

(è la restrizione di f a questo segmento)

2) integro $y \mapsto f(x, y)$ su $[c, d]$:

$$\int_c^d f(x, y) dy$$

3) $\int_c^d f(x,y) dy$ dipende ora da x ,
 quindi è una
 funzione della x ,
 che integro
 sull'intervallo
 $[a,b]$



$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

La formula di riduzione resta
garantisce che, per calcolare
l'integrale doppio posso
procedere attraverso le 2 integrazioni
successive

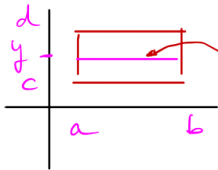
$$\bullet \int_c^d f(x, y) dy = h(x)$$

$$\bullet \int_a^b h(x) dx$$

N.B. : sono
integrazioni
di funzioni
di 1
VARIABILE,
che so CALCOLARE

Abbiamo un'analoga interpretazione per

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy.$$



1) fisso $y \in [c, d]$ e considero
la funzione $x \mapsto f(x, y)$: è
la restrizione di f a questo
segmento.

2) l'integrale $\int_a^b f(x, y) dx$: ottengo una
funzione della variabile y , che

3) integro su $[c, d]$.

Le formule di riduzione

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

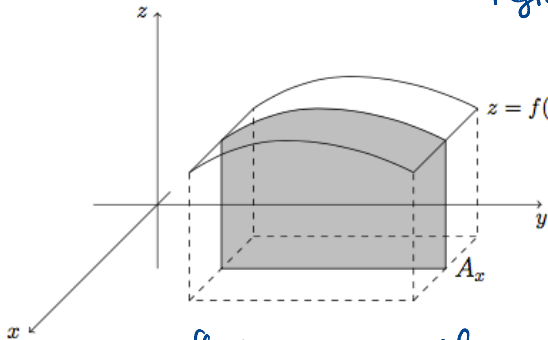
mi dice che svolgere le 3 operazioni
denotate nella slide precedente è
equivalente a calcolare

$$\iint_A f(x, y) dx dy.$$

Interpretazione geometrica nel caso $f \geq 0$

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

- per $x \in [a, b]$ fissato, $\int_c^d f(x, y) dy$ è l'area della regione piana A_x compresa fra la curva $z = f(x, y)$ e il piano $z = 0$



- per calcolare $\iint_A f(x, y) dx dy =$ volume del sottografo di f , integrato i contributi delle aree di A_x

Esempio

$$I = \iint_{[0,2] \times [1,3]} x^2 y \, dx dy$$

Posso applicare sia la formula di riduzione rispetto alla variabile x , sia la formula di riduzione rispetto alla variabile y

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left(\int_1^3 x^2 y \, dy \right) dx \\ &= \int_0^2 x^2 \left(\int_1^3 y \, dy \right) dx = \int_0^2 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^3 dx \\ &= \int_0^2 x^2 \cdot 4 \, dx = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Finora abbiamo definito gli integrali doppi per funzioni definite su rettangoli. Estendiamo l'operazione a fz. def. su insiemi più generali, gli insiemi di Jordan.

Per definirli, introduciamo la nozione di funzione caratteristica di un insieme.

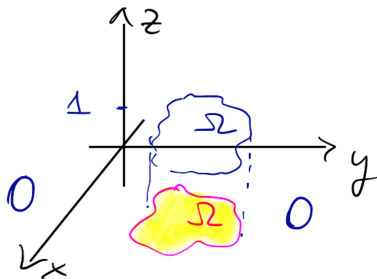
Integrali doppi su insiemi generali

Definizione (Funzione caratteristica)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. La funzione $\chi_\Omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\chi_\Omega(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in \Omega, \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

si dice **funzione caratteristica** di Ω .



Estendiamo ora gli integrali doppi agli insiemi di JORDAN

Definizione (Integrale doppio su insiemi di Jordan)

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ e sia $\Omega \subseteq A$. Diciamo che Ω è un insieme di Jordan, se la funzione χ_Ω è integrabile secondo Riemann. In tal caso, data una funzione integrabile $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, poniamo

$$\iint_{\Omega} f \, dx \, dy := \iint_A \chi_{\Omega} f \, dx \, dy$$

Oss 1: Gli insiemi di Jordan sono contenuti in rettangoli - Quindi sono in particolare insiemi limitati.

Definizione (Integrale doppio su insiemi di Jordan)

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ e sia $\Omega \subseteq A$. Diciamo che Ω è un insieme di **Jordan**, se la funzione χ_Ω è integrabile secondo Riemann. In tal caso, data una funzione integrabile $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, poniamo

$$\iint_{\Omega} f \, dx \, dy := \iint_A \chi_\Omega f \, dx \, dy$$

N.B. $\chi_\Omega f$ è una funzione integrabile, in quanto è prodotto di funzioni integrabili.

oss! 2) La funzione

$$\chi_\Omega(x, y) f(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \in A \setminus \Omega \end{cases}$$

di fatto legge solo i valori di f su Ω .

■ Per $f = 1$ si ha

$$\iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \text{area}(\Omega).$$

Proprietà elementari

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ e siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq A$ insiemi di Jordan. Siano inoltre $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni integrabili. Valgono queste proprietà:

1. **Additività:** se $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, allora

$$\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f \, dx \, dy = \iint_{\Omega_1} f \, dx \, dy + \iint_{\Omega_2} f \, dx \, dy$$

2. **Confronto:** se $f(x, y) \leq g(x, y)$ per ogni $(x, y) \in A$, allora

$$\iint_{\Omega_j} f \, dx \, dy \leq \iint_{\Omega_j} g \, dx \, dy \quad j = 1, 2.$$

3. **Confronto con il modulo:** si ha

$$\left| \iint_{\Omega_j} f \, dx \, dy \right| \leq \iint_{\Omega_j} |f| \, dx \, dy \quad j = 1, 2.$$

Vediamo ora le proprietà di
SIMMETRIA.

N.B. Ripassare le proprietà di
simmetria per gli integrali di
funzioni di una variabile,
su intervalli simmetrici
rispetto all'origine

(c'è $\int_{-M}^M f(x) dx$)

Casi particolari: simmetrie

1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme di Jordan. Supponiamo che Ω sia **simmetrico rispetto all'asse delle y**, cioè per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vale

$$(x, y) \in \Omega \quad \Rightarrow \quad (-x, y) \in \Omega.$$

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile. Valgono le seguenti affermazioni:

1. Se f è **dispari in x**, cioè $f(-x, y) = -f(x, y)$, allora

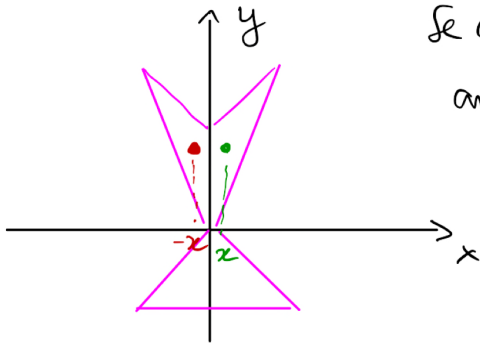
$$\iint_{\Omega} f \, dx \, dy = 0.$$

2. Se f è **pari in x**, cioè $f(-x, y) = f(x, y)$, allora

$$\iint_{\Omega} f \, dx \, dy = 2 \iint_{\Omega_x} f \, dx \, dy$$

dove $\Omega_x = \{(x, y) \in \Omega : x \geq 0\}$.

ESEMPIO di dominio simmetrico rispetto
all'asse y



Se $(x, y) \in \Omega$, allora
anche $(-x, y) \in \Omega$

Casi particolari: simmetrie

2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme di Jordan. Supponiamo che Ω sia **simmetrico rispetto all'asse delle x** , cioè per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vale

$$(x, y) \in \Omega \quad \Rightarrow \quad (x, -y) \in \Omega.$$

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile. Valgono le seguenti affermazioni:

1. Se f è **dispari in y** , cioè $f(x, -y) = -f(x, y)$, allora

$$\iint_{\Omega} f \, dx \, dy = 0.$$

2. Se f è **pari in y** , cioè $f(x, -y) = f(x, y)$, allora

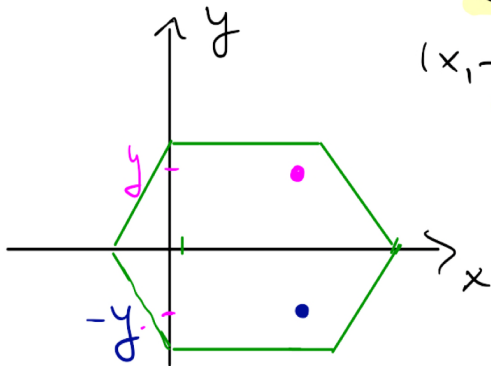
$$\iint_{\Omega} f \, dx \, dy = 2 \iint_{\Omega_y} f \, dx \, dy$$

dove $\Omega_y = \{(x, y) \in \Omega : y \geq 0\}$.

ESEMPIO di dominio simmetrico rispetto
all'asse x

$\forall (x, y) \in \Omega$, anche

$(x, -y) \in \Omega$



Ora estenderemo le formule di riduzione viste per i rettangoli a insiemi più generali.

Sono i cosiddetti insiemi normali rispetto all'asse delle x o all'asse delle y

Casi particolari: insiemi normali

Un insieme è normale rispetto all'asse x se esso si può descrivere come la regione di piano compresa fra i grafici di 2 funzioni α e β , definite su un intervallo $[a, b]$ fisso.

Definizione (Insiemi normali rispetto all'asse x)

Siano $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni tali che

$$\alpha(x) \leq \beta(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

L'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

è detto insieme **normale rispetto all'asse delle x** .

Casi particolari: insiemi normali

Definizione (Insiemi normali rispetto all'asse y)

Siano $\gamma, \delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni tali che

$$\gamma(y) \leq \delta(y) \quad \forall y \in [c, d]$$

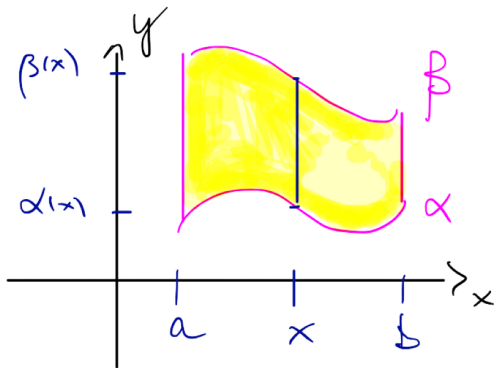
L'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$$

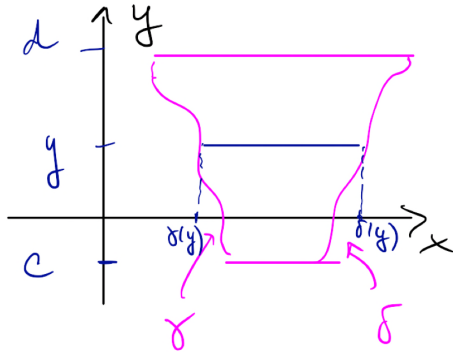
è detto insieme **normale rispetto all'asse delle y** .

cioè, Ω è la regione di piano compresa fra i grafici di 2 funzioni della variabile y .

ESEMPIO di dominio normale rispetto
all'asse x



ESEMPIO di dominio normale rispetto
all'asse y



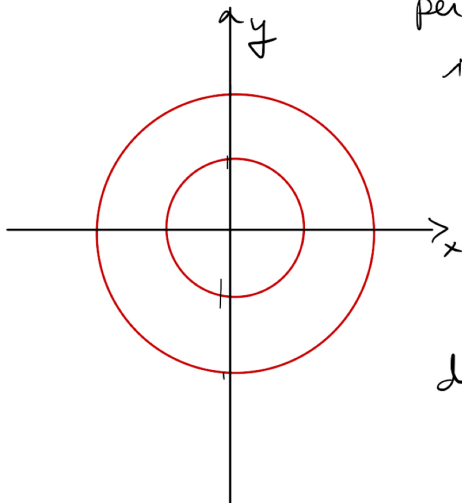
■ Gli insiemi normali determinati da due funzioni **integrabili** $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o $\gamma, \delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sono insiemi di Jordan.

■ Esistono insiemi normali sia rispetto all'asse delle x sia rispetto all'asse delle y : rettangoli, triangoli, etc.

In questi insiemi si possono applicare
ENTRAMBRE le formule di riduzione

Esistono insiemi che sono normali solo
rispetto a uno degli assi: qui la scelta
della formula di riduzione è obbligata....

- Dall'altra parte, esistono insiemi che non sono normali rispetto a nessuno degli assi: corona circolare,...



per integrali su
insiemi di questo
tipo non servono
le formule di
riduzione ma
conviene fare
un cambiamento
di variabili.

Teorema (Formule di riduzione per insiemi normali)

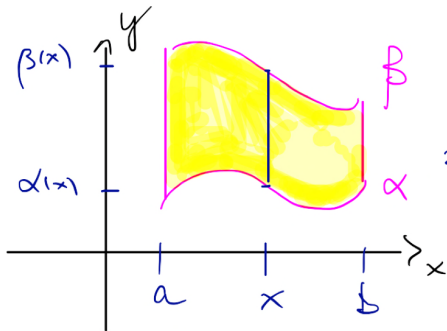
Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ e sia $\Omega \subseteq A$. Sia inoltre $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Valgono le seguenti affermazioni:

1. Se Ω è normale rispetto all'asse delle x e determinato dalle funzioni integrabili $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow [c, d]$, allora

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx. \quad (3)$$

2. Se Ω è normale rispetto all'asse delle y e determinato dalle funzioni integrabili $\gamma, \delta : [c, d] \rightarrow [a, b]$, allora

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) \, dx \right) dy. \quad (4)$$

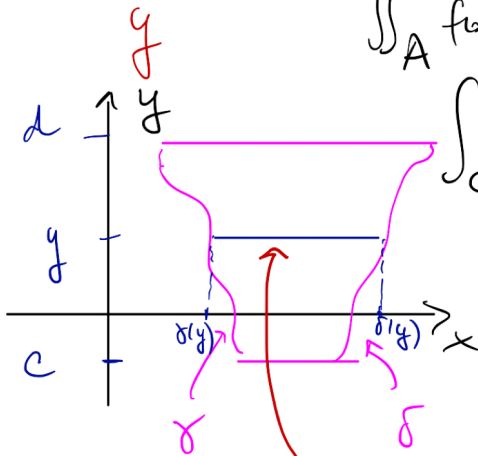


- 1) fisso $x \in [a, b]$,
e considero
 $y \mapsto f(x, y)$
- 2) Lo integro
sull'intervallo
dove varia y ,
cioè $[\alpha(x), \beta(x)]$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

- 3) integro tutto
rispetto a x

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\delta(y)}^{\gamma(y)} f(x,y) dx \right) dy$$



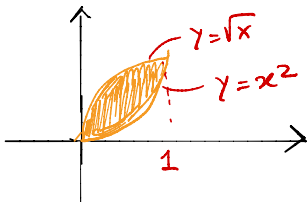
come:

1) fisso y e
integro
 $x \mapsto f(x,y)$ sul
segmento

2) integrale tutto in y

Esempio 1 : Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = y$ e sia

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$



Ω è già dato come dominio normale rispetto all'asse delle x

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

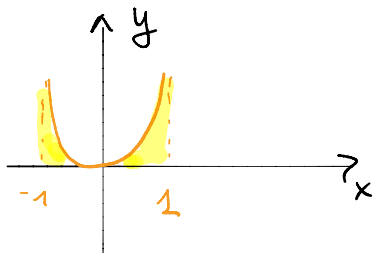
$$= \int_0^1 \frac{1}{2} [x - x^4] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{5-2}{10} = \frac{3}{20}$$

Esempio 2 :

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = x^2 y$ e sia

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^4\}$$



Ω è già dato
come dominio
normale
rispetto all'asse x

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Omega} x^2 y \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{x^4} x^2 y \, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 x^2 \left(\int_0^{x^4} y \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x^4} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^{10} dx =$$

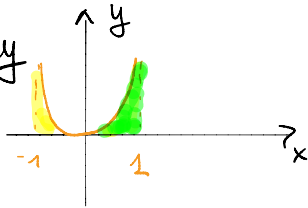
$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^1 x^{10} dx = \frac{1}{11}$$

NB avrei anche potuto applicare delle considerazioni di simmetria, osservando che

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = 2 \iint_{\Omega^+} f(x,y) dx dy$$

infatti, Ω è
 simm. rispetto asse y
 e f è pari in x

con $\Omega^+ =$



Cambiamento di variabili

Definizione (Cambiamento di variabili)

Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ due aperti. Diciamo che $G : V \rightarrow U$ è un cambiamento di variabili di classe C^1 tra U e V se $G \in C^1(V)$, G è invertibile con $G^{-1} : U \rightarrow V$ di classe C^1 .

N.B. G è un campo vettoriale da $\mathbb{R}^2$
a valori in $\mathbb{R}^2$. Quindi

$$G = (G_1, G_2) \quad \text{con} \quad G_1, G_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$$

■ Interpretazione: passiamo dalle coordinate $(x, y) \in U$ alle nuove coordinate $(u, v) \in V$ definite da

$$x = G_1(u, v), \quad y = G_2(u, v).$$

Jacobiano

Definizione (Jacobiano di un cambio di variabili)

Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ due aperti e sia $G : V \rightarrow U$ un cambiamento di variabili di classe C^1 . Chiamiamo **jacobiano di G** l'applicazione $J_G : V \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$J_G(u, v) = \det \begin{pmatrix} \partial_u G_1(u, v) & \partial_v G_1(u, v) \\ \partial_u G_2(u, v) & \partial_v G_2(u, v) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Teorema (Cambiamento di variabili)

Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ due aperti e sia $G : V \rightarrow U$ un cambiamento di variabili di classe C^1 . Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $\Omega \subset U$ un insieme di Jordan. Allora $G^{-1}(\Omega)$ è di Jordan e vale

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{G^{-1}(\Omega)} f(G_1(u, v), G_2(u, v)) |J_G(u, v)| \, du \, dv \quad (6)$$

■ L'insieme $G^{-1}(\Omega)$ è la controimmagine di Ω tramite l'applicazione G :

$$G^{-1}(\Omega) = \{(u, v) \in V : G(u, v) \in \Omega\}.$$

ossia $G^{-1}(\Omega)$ è l'insieme dei punti di V che vengono mappati in Ω

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{G^{-1}(\Omega)} f(G_1(u, v), G_2(u, v)) |J_G(u, v)| \, du \, dv$$

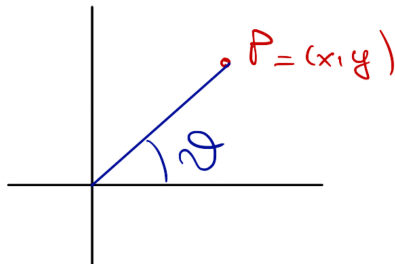
Coordinate polari

Sono le coordinate $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ definite dal cambio di variabili

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Quindi $u = r, v = \theta$, $G_1(r, \theta) = r \cos \theta$ e $G_2(r, \theta) = r \sin \theta$.

Calcoliamo lo jacobiano:



$$r = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Jacobiano della trasformazione

$$G_1 = r \cos(\theta)$$

$$G_2 = r \sin(\theta)$$

$$J(r, \theta) = \det \begin{bmatrix} \partial_r G_1(r, \theta) & \partial_\theta G_1(r, \theta) \\ \partial_r G_2(r, \theta) & \partial_\theta G_2(r, \theta) \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r \geq 0$$

La formula per il cambiamento in
coordinate polari diventa

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy =$$

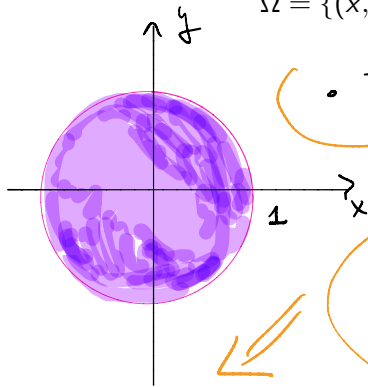
$$= \iint_{G^{-1}(\Omega)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

Esempio 1: Consideriamo l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy,$$

dove

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



• Ω è un disco di $C=(0,0)$ e
 $R=1 \Rightarrow$ simmetria
circolare

• la fz. integranda
contiene l'espressione
 x^2+y^2

Passo alle COORDINATE POLARI

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$dx dy \rightarrow r dr d\theta$$

$$\Omega = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\hookrightarrow G^{-1}(\Omega) = \{(r, \theta) / r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

$$= [0, 1] \times [0, 2\pi] \quad \checkmark \text{ RECTANGULAR}$$

$$f(x, y) \rightsquigarrow \tilde{f}(r, \theta) = \frac{1}{1 + r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)} =$$

$$= \frac{1}{1 + r^2}$$

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} \frac{1}{1+r^2} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\log(1+r^2)}{2} \right]_0^1 d\theta =$$

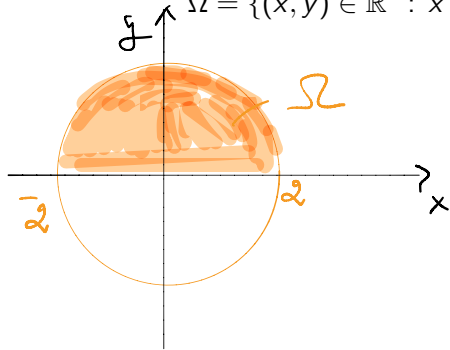
$$= \frac{1}{2} \log(2) \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta = \pi \log(2).$$

Esempio 2: Consideriamo l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

dove

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y\}.$$



- simmetria circolare
- presenza del termine $\sqrt{x^2 + y^2}$ nella f.z. integranda



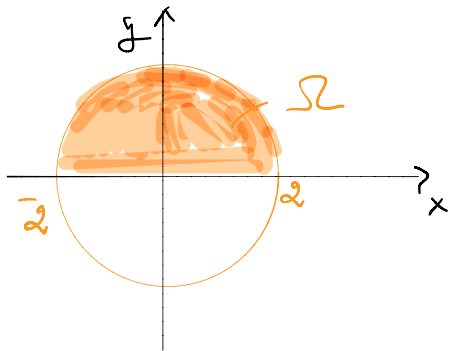
uso delle coordinate polari

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$dx dy \leadsto r dr d\theta$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leadsto \frac{r \sin(\theta)}{r} = \sin(\theta)$$



$$\begin{aligned} \Omega &\downarrow \\ \mathcal{A}^{-1}(\Omega) &= \{ (r, \theta) / r \in [0, 2], \theta \in [0, \pi] \} \\ &= [0, 2] \times [0, \pi] \end{aligned}$$

$$I = \iint_{(0,2) \times [0,\pi]} \sin(\theta) \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sin(\theta) \left(\int_0^2 r \, dr \right) d\theta$$

$$= 2 \int_0^\pi \sin(\theta) \, d\theta = 2 \left[-\cos(\theta) \right]_0^\pi$$

$$= 4$$

Coordinate polari generalizzate (o ellittiche)

Sono le coordinate $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ definite dal cambio di variabili

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta, \quad a, b > 0.$$

Quindi $u = r, v = \theta$, $G_1(r, \theta) = ar \cos \theta$ e $G_2(r, \theta) = br \sin \theta$.

Calcoliamo lo jacobiano:

$$\begin{aligned} &= \det \begin{bmatrix} \partial_r G_1(r, \theta) & \partial_\theta G_1(r, \theta) \\ \partial_r G_2(r, \theta) & \partial_\theta G_2(r, \theta) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= ab\pi \cos^2(\theta) + ab\pi \sin^2(\theta) \\ = ab\pi$$

e quindi

$$dx dy \rightarrow ab \pi dr d\theta$$

Se $a=b=1$ riporto le coord. polari

Le coordinate ellittiche si usano quando la geometria del dominio è legata all'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Esempio: Calcoliamo l'area dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

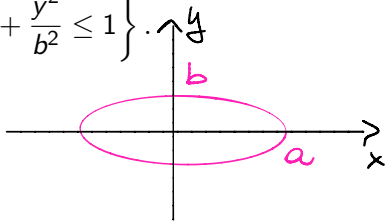
$$\text{area}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy$$

in coordinate ellittiche

$$\Omega \rightarrow \tilde{\Omega} = \{ (r, \theta) \mid \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, 1] \}$$

$$\text{area}(\Omega) = \iint_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} ab r \, dr \, d\theta$$

$$= ab \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 r \, dr \right] d\theta =$$



$$= ab \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta =$$

$$= ab\pi$$