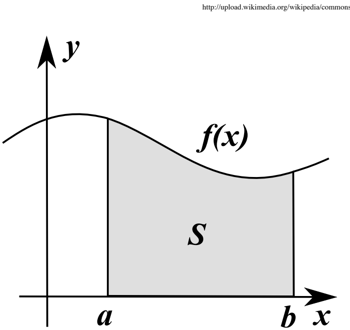
Integrali doppi

Riccarda Rossi

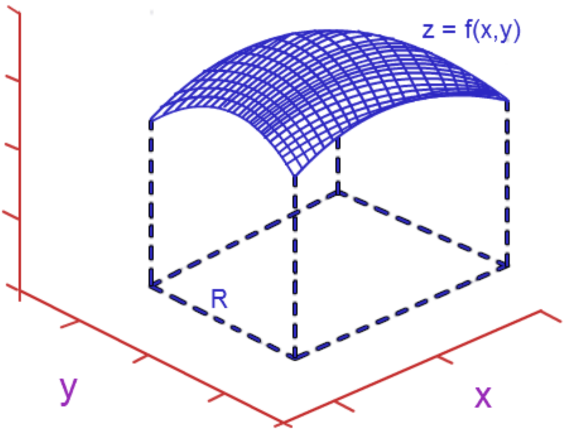
Università di Brescia

Analisi Matematica B

Motivazione per l'integrale di Riemann: calcolo di un'area



Motivazione per gli integrali doppi: calcolo di un volume



Definizione di integrale doppio

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Date due suddivisioni

$$D_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

e

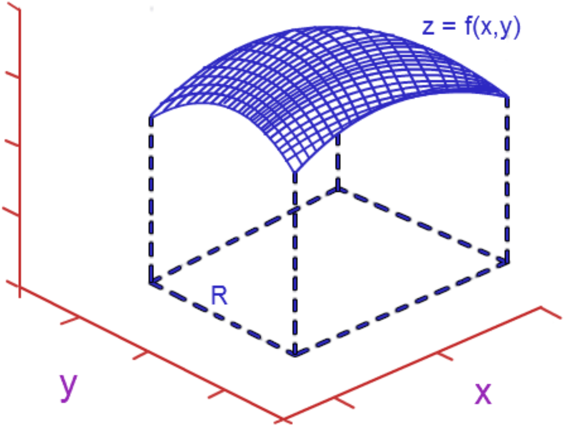
$$D_2 = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\}$$

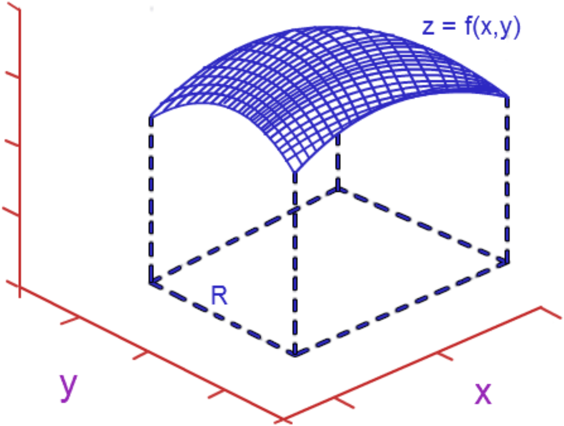
di $[a, b]$ e $[c, d]$, chiamiamo **somma inferiore** e **somma superiore di** f **rispetto alla griglia** $D_1 \times D_2$ le quantità

$$s(f, D_1 \times D_2) = \sum_{i,j} \left(\inf_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

e

$$S(f, D_1 \times D_2) = \sum_{i,j} \left(\sup_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$


z = f(x,y)
R
y
x


z = f(x,y)
R
y
x

- $s(f, D_1 \times D_2) = \sum_{i,j} \left(\inf_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

- $S(f, D_1 \times D_2) = \sum_{i,j} \left(\sup_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

Chiamiamo inoltre i valori

- $I(f) = \sup_{D_1, D_2} s(f, D_1 \times D_2)$

- $J(f) = \inf_{D_1, D_2} S(f, D_1 \times D_2)$

l'integrale inferiore e **l'integrale superiore** di f.

Dalla definizione segue che

$$I(f) \leq J(f).$$

Definizione (Funzioni integrabili e integrale doppio)

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Diciamo che f è integrabile secondo Riemann se $I(f) = J(f)$. Tale valore si indica con

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy,$$

e si dice integrale doppio di f su A.

- Per $f = 1$ si ha
$$\iint_A dx\, dy = \mathrm{area}(A).$$

Teorema (Le funzioni continue sono integrabili)

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ *e sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora* f *è integrabile secondo Riemann.*

Teorema (**Proprietà dell'integrale doppio**)

Sia $A = [a,b] \times [c,d]$ e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili. Allora valgono le seguenti proprietà:

1. **Linearità**: *per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta*

$$\iint_A (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dx\, dy = \alpha \iint_A f(x,y)\, dx\, dy + \beta \iint_A g(x,y)\, dx\, dy.$$

2. **Confronto**: *se $f(x,y) \le g(x,y)$ per ogni $(x,y) \in A$, si ha*

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy \le \iint_A g(x,y)\, dx\, dy$$

3. **Confronto con il modulo**:

$$\left| \iint_A f(x,y)\, dx\, dy \right| \le \iint_A |f(x,y)|\, dx\, dy.$$

Teorema (**Formule di riduzione per rettangoli**)

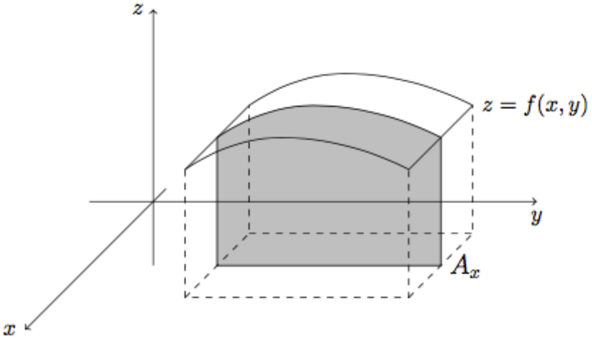
Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ *e sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile. Supponiamo che per ogni* $x \in [a, b]$ *l'applicazione* $y \mapsto f(x, y)$ *sia integrabile su* $[c, d]$. *Allora si ha*

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx. \tag{1}$$

Analogamente, se per ogni $y \in [c, d]$ *l'applicazione* $x \mapsto f(x, y)$ *è integrabile su* $[a, b]$, *allora si ha*

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy. \tag{2}$$

Interpretazione geometrica



Esempio

$$\iint_{[0,2]\times[1,3]} x^2 y \, dxdy$$

Integrali doppi su insiemi generali

Definizione (Funzione caratteristica)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. *La funzione* $\chi_\Omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$\chi_\Omega(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (x, y) \in \Omega, \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

si dice **funzione caratteristica** *di* Ω.

Definizione (Integrale doppio su insiemi di Jordan)

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ *e sia* $\Omega \subseteq A$. *Diciamo che* Ω *è un insieme di* **Jordan**, *se la funzione* χ_Ω *è integrabile secondo Riemann. In tal caso, data una funzione integrabile* $f : A \to \mathbb{R}$, *poniamo*

$$\iint_\Omega f \, dx \, dy := \iint_A \chi_\Omega f \, dx \, dy$$

- Per $f = 1$ si ha
$$\iint_{\Omega} dx\, dy = \mathrm{area}(\Omega).$$

Proprietà elementari

Sia $A = [a,b] \times [c,d]$ e siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq A$ insiemi di Jordan. Siano inoltre $f, g : A \to \mathbb{R}$ funzioni integrabili. Valgono queste proprietà :

1. **Additività :** se $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, allora
$$\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f \, dx \, dy = \iint_{\Omega_1} f \, dx \, dy + \iint_{\Omega_2} f \, dx \, dy$$
2. **Confronto:** se $f(x,y) \leq g(x,y)$ per ogni $(x,y) \in A$, allora
$$\iint_{\Omega_j} f \, dx \, dy \leq \iint_{\Omega_j} g \, dx \, dy \qquad j = 1, 2.$$
3. **Confronto con il modulo:** si ha
$$\left| \iint_{\Omega_j} f \, dx \, dy \right| \leq \iint_{\Omega_j} |f| \, dx \, dy \qquad j = 1, 2.$$

Casi particolari: simmetrie

1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme di Jordan. Supponiamo che Ω sia **simmetrico rispetto all'asse delle y**, cioè per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vale

$$(x, y) \in \Omega \quad \Rightarrow \quad (-x, y) \in \Omega.$$

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabile. Valgono le seguenti affermazioni:

1. Se f è **dispari in** x, cioè $f(-x, y) = -f(x, y)$, allora

$$\iint_\Omega f \, dx \, dy = 0.$$

2. Se f è **pari in** x, cioè $f(-x, y) = f(x, y)$, allora

$$\iint_\Omega f \, dx \, dy = 2 \iint_{\Omega_x} f \, dx \, dy$$

dove $\Omega_x = \{(x, y) \in \Omega : x \geq 0\}$.

Casi particolari: simmetrie

2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme di Jordan. Supponiamo che Ω sia **simmetrico rispetto all'asse delle x**, cioè per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vale

$$(x, y) \in \Omega \quad \Rightarrow \quad (x, -y) \in \Omega.$$

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabile. Valgono le seguenti affermazioni:

1. Se f è **dispari in** y, cioè $f(x, -y) = -f(x, y)$, allora

$$\iint_{\Omega} f \, dx \, dy = 0.$$

2. Se f è **pari in** y, cioè $f(x, -y) = f(x, y)$, allora

$$\iint_{\Omega} f \, dx \, dy = 2 \iint_{\Omega_y} f \, dx \, dy$$

dove $\Omega_y = \{(x, y) \in \Omega : y \geq 0\}$.

Casi particolari: insiemi normali

Definizione (Insiemi normali rispetto all'asse x)

Siano $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ *due funzioni tali che*

$$\alpha(x) \leq \beta(x) \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

L'insieme

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\right\}$$

è detto insieme **normale rispetto all'asse delle x**.

Casi particolari: insiemi normali

Definizione (Insiemi normali rispetto all'asse y)

Siano $\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ *due funzioni tali che*

$$\gamma(y) \leq \delta(y) \qquad \forall\, y \in [c,d]$$

L'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ c \leq y \leq d,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\right\}$$

è detto insieme **normale rispetto all'asse delle y**.

- Gli insiemi normali determinati da due funzioni **integrabili** $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ o $\gamma, \delta : [c, d] \to \mathbb{R}$ sono insiemi di Jordan.

- Esistono insiemi normali sia rispetto all'asse delle x sia rispetto all'asse delle y: rettangoli, triangoli, etc.

- Dall'altra parte, esistono insiemi che non sono normali rispetto a nessuno degli assi: corona circolare,...

Teorema (**Formule di riduzione per insiemi normali**)

Sia $A = [a,b] \times [c,d]$ *e sia* $\Omega \subseteq A$*. Sia inoltre* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile. Valgono le seguenti affermazioni:*

1. *Se* Ω *è normale rispetto all'asse delle* x *e determinato dalle funzioni integrabili* $\alpha, \beta : [a,b] \to [c,d]$*, allora*

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{3}$$

2. *Se* Ω *è normale rispetto all'asse delle* y *e determinato dalle funzioni integrabili* $\gamma, \delta : [c,d] \to [a,b]$*, allora*

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{4}$$

Esempio 1 : Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = y$ e sia

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

Esempio 2 :

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = x^2 y$ e sia

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x^4\}$$

Cambiamento di variabili

Definizione (Cambiamento di variabili)

Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ due aperti. Diciamo che $G : V \to U$ è un cambiamento di variabili di classe C^1 tra U e V se $G \in C^1(V)$, G è invertibile con $G^{-1} : U \to V$ di classe C^1.

- Interpretazione: passiamo dalle coordinate $(x, y) \in U$ alle nuove coordinate $(u, v) \in V$ definite da

$$x = G_1(u, v), \qquad y = G_2(u, v).$$

Jacobiano

Definizione (Jacobiano di un cambio di variabili)

Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ *due aperti e sia* $G : V \to U$ *un cambiamento di variabili di classe* C^1. *Chiamiamo* **jacobiano di** G *l'applicazione* $J_G : V \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$J_G(u,v) = \det \begin{pmatrix} \partial_u G_1(u,v) & \partial_v G_1(u,v) \\ \partial_u G_2(u,v) & \partial_v G_2(u,v) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Teorema (Cambiamento di variabili)

Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ due aperti e sia $G : V \to U$ un cambiamento di variabili di classe C^1. Sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $\Omega \subset U$ un insieme di Jordan. Allora $G^{-1}(\Omega)$ è di Jordan e vale

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{G^{-1}(\Omega)} f(G_1(u,v), G_2(u,v))\,|J_G(u,v)|\,du\,dv \qquad (6)$$

- L'insieme $G^{-1}(\Omega)$ è la controimmagine di Ω tramite l'applicazione G :

$$G^{-1}(\Omega) = \{(u,v) \in V : \ G(u,v) \in \Omega\}.$$

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{G^{-1}(\Omega)} f(G_1(u,v), G_2(u,v))\,|J_G(u,v)|\,du\,dv$$

Confronto con la formula di cambiamento di variabile per integrali in una variabile

Coordinate polari

Sono le coordinate $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ definite dal cambio di variabili

$$x = r \cos \theta, \qquad y = r \sin \theta.$$

Quindi $u = r, v = \theta, G_1(r, \theta) = r \cos \theta$ e $G_2(r, \theta) = r \sin \theta$. Calcoliamo lo jacobiano:

Esempio 1: Consideriamo l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy,$$

dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Esempio 2: Consideriamo l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy,$$

dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 4, \ 0 \leq y\}.$$

Coordinate polari generalizzate

Sono le coordinate $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ definite dal cambio di variabili

$$x = a\,r\cos\theta, \qquad y = b\,r\sin\theta, \qquad a, b > 0.$$

Quindi $u = r$, $v = \theta$, $G_1(r,\theta) = ar\cos\theta$ e $G_2(r,\theta) = br\sin\theta$.

Calcoliamo lo jacobiano:

Esempio: Calcoliamo l'area dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$