Integrali doppi

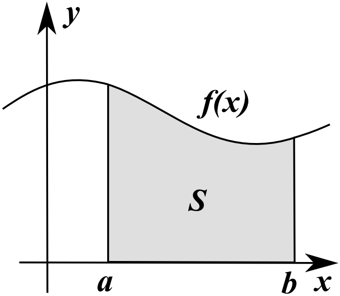
Riccarda Rossi

Università di Brescia

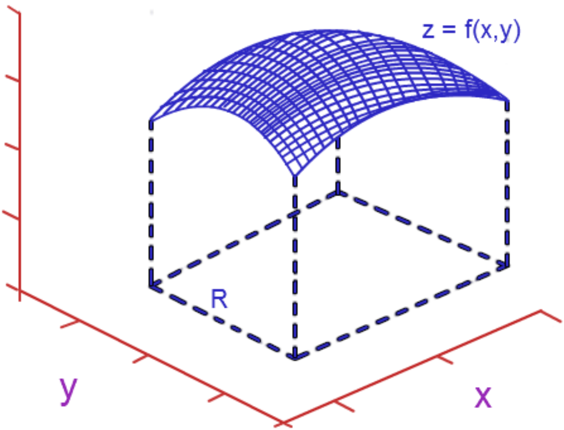
Analisi Matematica B

Motivazione per l'integrale di Riemann: calcolo di un'area

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f2/Integral...



Motivazione per gli integrali doppi: calcolo di un volume



Definizione di integrale doppio

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Date due suddivisioni

$$D_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

e

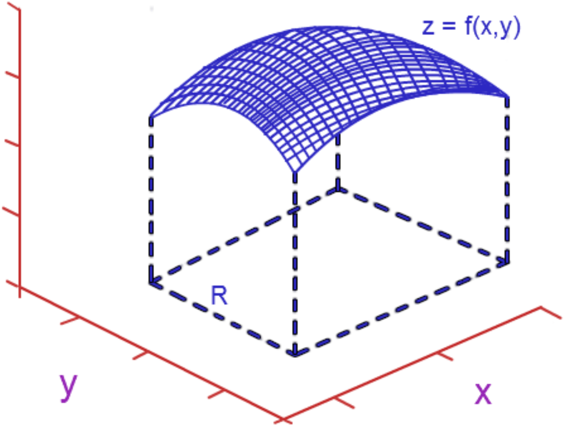
$$D_2 = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\}$$

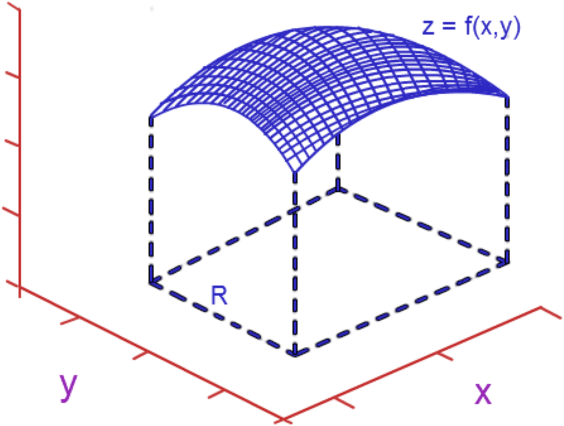
di $[a, b]$ e $[c, d]$, chiamiamo **somma inferiore** e **somma superiore di** f **rispetto alla griglia** $D_1 \times D_2$ le quantità

$$s(f, D_1 \times D_2) = \sum_{i,j} \left(\inf_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

e

$$S(f, D_1 \times D_2) = \sum_{i,j} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$


z = f(x,y)
R
y
x


z = f(x,y)
R
y
x

Chiamiamo inoltre i valori

$$I(f) = \sup_{D_1, D_2} s(f, D_1 \times D_2)$$

e

$$J(f) = \inf_{D_1, D_2} S(f, D_1 \times D_2)$$

l'integrale inferiore e **l'integrale superiore** di f.

Dalla definizione segue che

$$I(f) \leq J(f).$$

Definizione (Funzioni integrabili e integrale doppio)

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ *e sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata. Diciamo che* f *è integrabile secondo Riemann se* $I(f) = J(f)$*. Tale valore si indica con*

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy,$$

e si dice integrale doppio di f *su* A*.*

- Per $f = 1$ si ha
$$\iint_A dx\,dy = \mathrm{area}(A).$$

Teorema (Le funzioni continue sono integrabili)

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ *e sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora* f *è integrabile secondo Riemann.*

Teorema (**Proprietà dell'integrale doppio**)

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili. Allora valgono le seguenti proprietà:

1. **Linearità**: *per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta*

$$\iint_A (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dx\, dy = \alpha \iint_A f(x,y)\, dx\, dy + \beta \iint_A g(x,y)\, dx\, dy.$$

2. **Confronto**: *se $f(x,y) \le g(x,y)$ per ogni $(x,y) \in A$, si ha*

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy \le \iint_A g(x,y)\, dx\, dy$$

3. **Confronto con il modulo**:

$$\left| \iint_A f(x,y)\, dx\, dy \right| \le \iint_A |f(x,y)|\, dx\, dy.$$

Teorema (Formule di riduzione per rettangoli)

Sia $A = [a,b] \times [c,d]$ *e sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile. Supponiamo che per ogni* $x \in [a,b]$ *l'applicazione* $y \mapsto f(x,y)$ *sia integrabile su* $[c,d]$. *Allora si ha*

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{1}$$

Analogamente, se per ogni $y \in [c,d]$ *l'applicazione* $x \mapsto f(x,y)$ *è integrabile su* $[a,b]$, *allora si ha*

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{2}$$

- Interpretazione geometrica...

Integrali doppi su insiemi generali

Definizione (Funzione caratteristica)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. *La funzione* $\chi_\Omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$\chi_\Omega(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in \Omega, \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

si dice **funzione caratteristica** *di* Ω.

Definizione (Integrale doppio su insiemi generali)

Sia $A = [a,b] \times [c,d]$ e sia $\Omega \subseteq A$. Diciamo che Ω è un insieme di **Jordan**, *se la funzione χ_Ω è integrabile secondo Riemann. In tal caso, data una funzione integrabile $f : A \to \mathbb{R}$, poniamo*

$$\iint_\Omega f \, dx \, dy := \iint_A \chi_\Omega f \, dx \, dy$$

- Per $f = 1$ si ha

$$\iint_\Omega dx \, dy = \mathrm{area}(\Omega).$$

Proprietà elementari

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ e siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq A$ insiemi di Jordan. Siano inoltre $f, g : A \to \mathbb{R}$ funzioni integrabili. Valgono queste proprietà :

1. **Additività :** se $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, allora
$$\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f \, dx \, dy = \iint_{\Omega_1} f \, dx \, dy + \iint_{\Omega_2} f \, dx \, dy$$
2. **Confronto:** se $f(x, y) \leq g(x, y)$ per ogni $(x, y) \in A$, allora
$$\iint_{\Omega_j} f \, dx \, dy \leq \iint_{\Omega_j} g \, dx \, dy \qquad j = 1, 2.$$
3. **Confronto con il modulo:** si ha
$$\left| \iint_{\Omega_j} f \, dx \, dy \right| \leq \iint_{\Omega_j} |f| \, dx \, dy \qquad j = 1, 2.$$

Casi particolari: simmetrie

1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme di Jordan. Supponiamo che Ω sia **simmetrico rispetto all'asse delle y**, cioè per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vale

$$(x, y) \in \Omega \quad \Rightarrow \quad (-x, y) \in \Omega.$$

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabile. Valgono le seguenti affermazioni:

1. Se f è **dispari in** x, cioè $f(-x, y) = -f(x, y)$, allora
$$\iint_\Omega f \, dx \, dy = 0.$$
2. Se f è **pari in** x, cioè $f(-x, y) = f(x, y)$, allora
$$\iint_\Omega f \, dx \, dy = 2 \iint_{\Omega_x} f \, dx \, dy$$
dove $\Omega_x = \{(x, y) \in \Omega : x \geq 0\}$.

Casi particolari: simmetrie

2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme di Jordan. Supponiamo che Ω sia **simmetrico rispetto all'asse delle x**, cioè per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vale

$$(x, y) \in \Omega \quad \Rightarrow \quad (x, -y) \in \Omega.$$

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabile. Valgono le seguenti affermazioni:

1. Se f è **dispari in** y, cioè $f(x, -y) = -f(x, y)$, allora
$$\iint_\Omega f\, dx\, dy = 0.$$
2. Se f è **pari in** y, cioè $f(x, -y) = f(x, y)$, allora
$$\iint_\Omega f\, dx\, dy = 2 \iint_{\Omega_y} f\, dx\, dy$$
dove $\Omega_y = \{(x, y) \in \Omega : y \geq 0\}$.

Casi particolari: insiemi normali

Definizione (Insiemi normali rispetto all'asse x)

Siano $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ *due funzioni tali che*

$$\alpha(x) \leq \beta(x) \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

L'insieme

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \right\}$$

è detto insieme **normale rispetto all'asse delle x**.

Casi particolari: insiemi normali

Definizione (Insiemi normali rispetto all'asse y)

Siano $\gamma, \delta : [c, d] \to \mathbb{R}$ *due funzioni tali che*

$$\gamma(y) \leq \delta(y) \qquad \forall\ y \in [c, d]$$

L'insieme

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ c \leq y \leq d,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\right\}$$

è detto insieme **normale rispetto all'asse delle y**.

- Gli insiemi normali determinati da due funzioni **integrabili** $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ o $\gamma, \delta : [c, d] \to \mathbb{R}$ sono insiemi di Jordan.

- Esistono insiemi normali sia rispetto all'asse delle x sia rispetto all'asse delle y: rettangoli, triangoli, etc.

- Dall'altra parte, esistono insiemi che non sono normali rispetto a nessuno degli assi: corona circolare,...

Teorema (**Formule di riduzione per insiemi normali**)

Sia $A = [a,b] \times [c,d]$ e sia $\Omega \subseteq A$. Sia inoltre $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Valgono le seguenti affermazioni:

1. *Se Ω è normale rispetto all'asse delle x e determinato dalle funzioni integrabili $\alpha, \beta : [a,b] \to [c,d]$, allora*

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{3}$$

2. *Se Ω è normale rispetto all'asse delle y e determinato dalle funzioni integrabili $\gamma, \delta : [c,d] \to [a,b]$, allora*

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{4}$$

Dimostrazione:

Esempio 1 : Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = y$ e sia

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$$

Esempio 2 :

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = x^2 y$ e sia

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, -1 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq x^4\}$$