La ricerca di punti di estremo assoluto

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi Matematica B

Richiami di teoria

Il teorema di Weierstrass

Sia

$$K \subset \mathbb{R}^N \text{ un insieme compatto.}$$

Sia $f : K \to \mathbb{R}$ un campo scalare continuo su K.
Allora f ammette in K almeno un punto di massimo assoluto e almeno un punto di minimo assoluto, cioè

$$\exists\, x_m,\, x_M \in K \ : \ \forall\, x \in K \qquad \begin{cases} f(x) \geq fx_m), \\ f(x) \leq f(x_M). \end{cases}$$

Chiamiamo x_m e X_M punti di estremo assoluto.

Problema:

Dato $K \subset \mathbb{R}^2$ compatto e

$$f : K \to \mathbb{R} \text{ differenziabile,}$$

determinare i punti di minimo e di massimo assoluto di f su K.

Procedimento:

1. cerco i punti di estremo (relativo) per f in $\mathrm{int}(K)$
2. cerco i punti di estremo (relativo) per f su ∂K
3. confronto i risultati ottenuti

Passo 1: cerco i pti. di estremo assol. in $\mathrm{int}(K)$

• È un problema di estremi liberi. Infatti, $\mathrm{int}(K)$ è un insieme aperto: per il Teor. di Fermat, se $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}(K)$ è un punto di estremo relativo per f, allora

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$$

Quindi determino tutti i punti di annullamento di ∇f. Se f è di classe C^2, li classifico tramite lo studio della matrice Hessiana.

Passo 2: cerco i pti. di estremo assol. su ∂K

- È un problema di estremo vincolato, del tipo:

Problema

Data $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

determinare i punti (x, y) di estremo per f,
vincolati a verificare $g(x, y) = 0$,

cioè i punti di estremo della restrizione di f all'insieme

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x, y) = 0\}$.

Metodo 1 per il problema di estremo vincolato

- esplicitare il vincolo $g(x, y) = 0$ rispetto a x o a y, per esempio $y = y(x)$

- N.B.: il vincolo può comportare delle limitazioni sulla variabile superstite x (x dovrà variare in un opportuno intervallo I)
- sostituire $y = y(x)$ nell'espressione di f: ottengo una funzione

$$h = h(x) = f(x, y(x))$$

- studio estremi relativi di h (nell'intervallo I!!)

- trovo $x_{\min}$ e $x_{\max}$
- trovo $y_{\min}$ e $y_{\max}$

Esempio 1

Calcoliamo i punti di estremo della funzione $f(x, y) = xy^2$ con il vincolo $x^2 + y^2 = 1$.

Metodo 2 per il problema di estremo vincolato

- dare l'equazione del vincolo $g(x,y)=0$ in
forma parametrica:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b]$$

- sostituendo l'eq. parametrica in f ottengo una funzione

$$h = h(t) = f(x(t), y(t))$$

- studio estremi relativi di h (nell'intervallo $[a,b]$!!)
- trovo $t_{\min}$ e $t_{\max}$
- trovo $x_{\min}$ e $x_{\max}$, $y_{\min}$ e $y_{\max}$

Esempio 2

Calcoliamo i punti di estremo della funzione $f(x, y) = xy$ con il vincolo $x^2 + y^2 = 1$.

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

- In generale, se il vincolo non si può esplicitare, si usa il metodo dei **moltiplicatori di Lagrange**.

Teorema: Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e siano $f, g \in C^1(\Omega)$. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto di estremo per f sotto la condizione di vincolo $g(x, y) = 0$. Se $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (detto *moltiplicatore di Lagrange*) tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0),$$

cioè

Osservazioni

Il Teorema afferma che se (x_0, y_0) è un punto di estremo di f sotto il vincolo $g(x, y) = 0$, allora esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che (x_0, y_0, λ_0) è il punto stazionario libero della funzione

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\, g(x, y),$$

detta *Lagrangiana*. Infatti,

Esempio 3

Calcoliamo i punti di estremo della funzione $f(x,y) = xy$ con il vincolo $x^2 + y^2 = 1$.