# Esercizi su integrali doppi: formule di riduzione

Riccarda Rossi

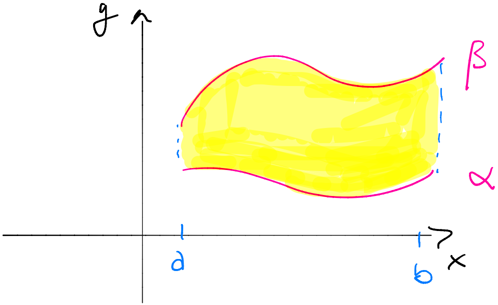
Università di Brescia

**Analisi Matematica B**

# Formule di riduzione (1)

Domini normali rispetto all'asse $x$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$



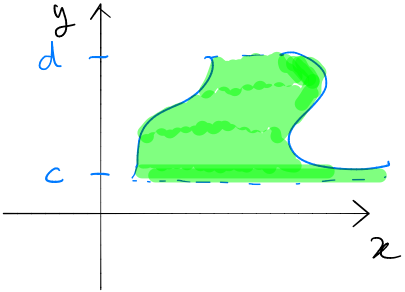

Si ha

$$\iint_T f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

# Formule di riduzione (2)

Domini normali rispetto all'asse $y$

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; c \leq y \leq d, \quad \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$$



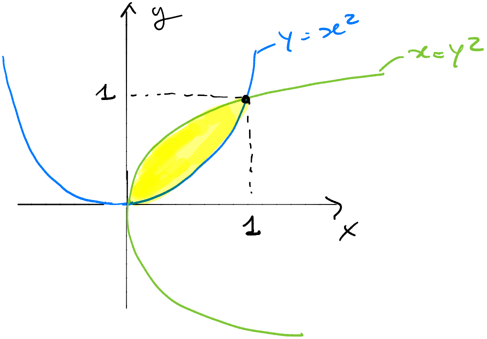

Si ha

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left( \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

# Es. 1.

$$I = \iint_T \frac{1}{1+x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

ove dove $T$ è il dominio limitato da $y = x^2$ e $x = y^2$.




T è sia dominio normale rispetto all'asse delle x, sia dominio normale rispetto all'asse delle y

Trattiamolo come dominio normale rispetto all' asse x

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x \in [0,1],\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

$$\left(\underline{\text{infatti}}:\quad \forall x \in [0,1] \quad x^2 \leq \sqrt{x}\right)$$

Applico la formula di riduzione per domini normali rispetto all'asse $x$.

$$I = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x}\, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1 \cdot dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx =: I_1 - I_2$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx = \int_0 \frac{x^2 - 1 + 1}{1+x}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \int_0^1 (x-1)\,dx + \Big[\log(1+x)\Big]_0^1 dx =$$

$$= \left[\frac{(x-1)^2}{2} + \log(1+x)\right]_0^1 = \log(2) - \frac{1}{2}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx =$$ effettuo la sostituzione

$s = \sqrt{x}$ $\qquad$ $x \in [0,1]$

$ds = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ $\qquad \Downarrow$

$\qquad\qquad\qquad s \in [0,1]$

$$= \int_0^1 \frac{2\sqrt{x}\,\sqrt{x}}{1+x}\,\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2x}{1+x}\,\frac{dx}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{2s^2}{1+s^2}\,ds = 2\int_0^1 \frac{s^2+1-1}{1+s^2}\,ds =$$

$$= 2 - 2\arctan(1) = 2 - \frac{\pi}{4}$$

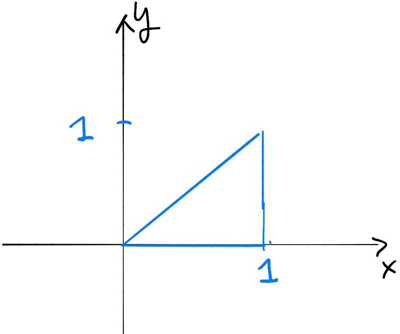
$$I = I_1 - I_2 = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{4} - \log(2)$$

<u>Es</u> : calcolare l'integrale trattando $T$ come dominio normale rispetto all' asse delle $y$

# Es. 2.

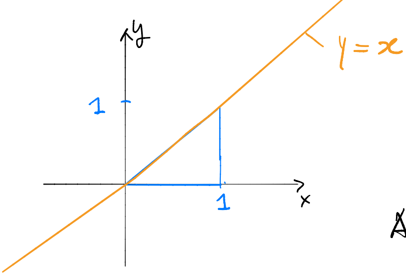
$$I = \iint_T \frac{x^2}{1+xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ove $T$ è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, e $(1,1)$.




ES: calcolare $I$ trattando $T$ come dominio normale rispetto all'asse $y$

Qui: $T$ = dominio normale rispetto all' asse $x$




$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in [0,1],\ 0 \le y \le x\}$$

Applico la corrispondente formula di riduzione

$$I = \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{x^2}{1+xy}\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 x \left[ \int_0^x \frac{x}{1+xy}\, dy \right] dx =$$

$$= \int_0^1 x \left[ \log(1+xy) \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 x \log(1+x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x \log(1+x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \log(s)\, ds = \frac{1}{2}\Big[ s\log(s) - s \Big]_1^2$$

$s = 1+x^2$

$ds = 2x\, dx$

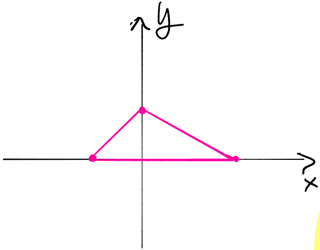
$x \in [0,1] \Rightarrow s = 1+x^2 \in [1,2]$

$$= \frac{1}{2}\Big[2\log(2) - 2 + 1\Big] = \log(2) - \frac{1}{2}$$

# Es. 3.

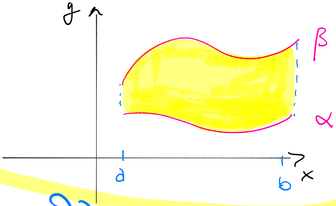
$$I = \iint_T xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ove $T$ è il triangolo di vertici $(-1,0)$, $(0,1)$, e $(2,0)$.




¿ T è un dominio normale rispetto all'asse delle x ?

Esistono due fz. $\alpha$ e $\beta$ tali che T si possa descrivere come



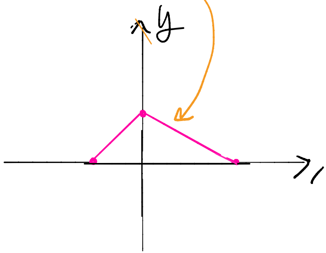

??

Chiaramente,

$\alpha(x) \equiv 0$.

ma la fz. $\beta$ deve avere

grafico

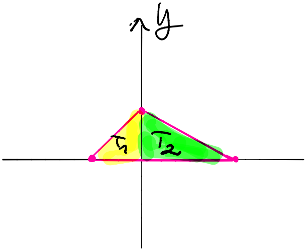



Cioè $f$ è una fz. definita a pezzi.

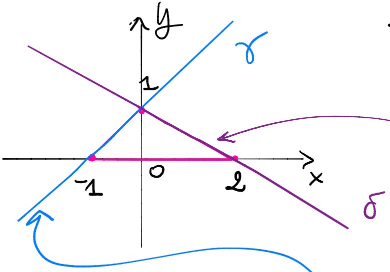
$\Longrightarrow$ Il calcolo dell'integrale si spezzerà in due integrali

Equivalentemente, $T$ è unione di 2 domini normali rispetto all'asse $x$

$T = T_1 \cup T_2$




$\Longrightarrow$ Conviene interpretare $T$ come dominio normale rispetto all'asse $y$




$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le y \le 1, \; \gamma(y) \le x < \delta(y)\}$$

$\gamma(y)$: considero la retta passante per $(-1,0)$ e $(0,1)$:

$$y = x+1 \iff x = y-1 =: \gamma(y)$$

$\delta(y)$: considero la retta passante per $(2,0)$ e $(0,1)$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 \iff x = 2(1-y) =: \delta(y)$$

$$\Rightarrow \quad T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1, \; y-1 \le x \le 2(1-y)\}$$

$$I = \int_0^1 \left( \int_{y-1}^{2(1-y)} xy \, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 y \left( \int_{y-1}^{2(1-y)} x \, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 y \, \frac{1}{2} \left[ 4(1-y)^2 - (y-1)^2 \right] dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 3y(1-y)^2 \, dy$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 \left( y + y^3 - 2y^2 \right) dy = \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \right] = \frac{1}{8}$$

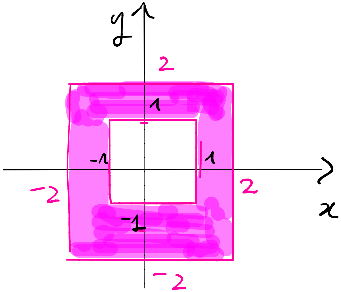
# Es. 4.

$$I = \iint_T x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$T = Q_2 \setminus Q_1$$

$$Q_2 = [-2,2] \times [-2,2]$$

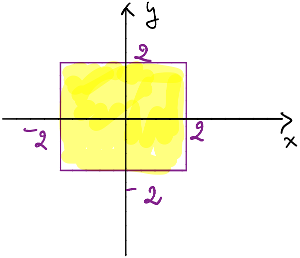
$$Q_1 = [-1,1] \times [-1,1]$$




Per la proprietà additiva dell'integrale doppio,

$$I = \iint_{Q_2} x^2\,dx\,dy - \iint_{Q_1} x^2\,dx\,dy =: I_2 - I_1$$

$$I_2 = \iint_{Q_2} x^2\,dx\,dy$$




(1) : $Q_2$ è simmetrico rispetto all'asse y

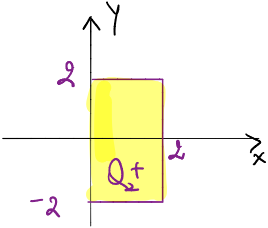
- $f(x,y) = x^2$ è PARI in $x$

$\Downarrow$

$$I_2 = 2 \iint_{Q_2^+} x^2\,dx\,dy$$

con $Q_2^+ = Q_2 \cap \{x \geq 0\}$

(2)




- $Q_2^+$ è simmetrico rispetto all'asse delle y
- $f(x,y)=x^2$ è PARI in y (non dipende da y!)

Quindi
$$\iint_{Q_2^+} x^2\,dx\,dy = 2\iint_{Q_2^{++}} x^2\,dx\,dy$$
$$= 2\iint_{[0,2]\times[0,2]} x^2\,dx\,dy$$

Quindi
$$\iint_{Q_2} x^2\,dx\,dy = 4\iint_{[0,2]\times[0,2]} x^2\,dx\,dy$$

## Osservazione generale per $\iint_T f(x,y)\,dx\,dy$

Supponiamo che

$$f(x,y) = h(x)\,g(y)$$

e

$$T = [a,b] \times [c,d]$$

(cioè, stiamo integrando su un rettangolo una fz. che è data dal prodotto di una fz. della sola $x$ e di una fz. della sola $y$)

Allora
$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{[a,b]\times[c,d]} h(x)\,g(y)\,dx\,dy$$

$$= \left(\int_a^b h(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$$

Quindi

$$\iint_{[0,2]\times[0,2]} x^2 \, dx\, dy = \left(\int_0^2 x^2 \, dx\right) \cdot \left(\int_0^2 1 \, dy\right)$$

$$= \frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow \quad I_2 = 4 \cdot \frac{16}{3} = \frac{64}{3}$$

Ora calcolo $I_1 = \iint_{[-1,1]\times[-1,1]} x^2 \, dx dy$

(1) Con le stesse considerazioni di simmetria concludo che

$$I_1 = 4 \iint_{[0,1]\times[0,1]} x^2 \, dx dy$$

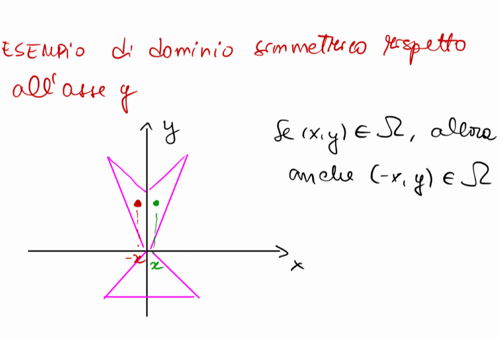
(2) $$\iint_{[0,1]\times[0,1]} x^2 \, dx \, dy = \left(\int_0^1 x^2 dx\right)\left(\int_0^1 1 \, dy\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \; I_1 = 4/3$

# Simmetrie (I)

Supponiamo che $T$ sia simmetrico rispetto all'asse delle $y$




e che $f$ sia pari in $x$, cioè

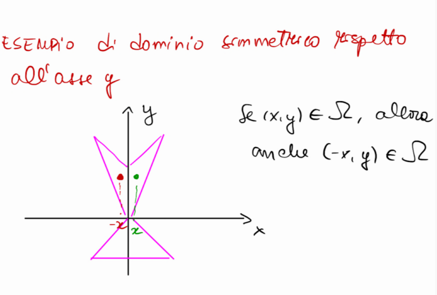
$$f(x,y) = f(-x,y) \quad \forall (x,y) \in T.$$

Allora

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{T^+} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

# Simmetrie (I)

Supponiamo che $T$ sia <u>simmetrico rispetto all'asse delle $y$</u>




e che $f$ sia <u>DISpari in $x$,</u> cioè

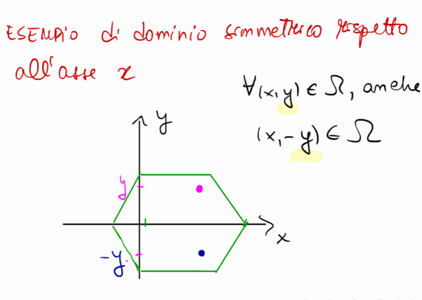
$$f(x,y) = -f(-x,y) \quad \forall (x,y) \in T.$$

Allora

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

# Simmetrie (II)

Analogamente per $T$ simmetrico rispetto all'asse delle $x$




e $f$ pari (DISpari) in $y$....

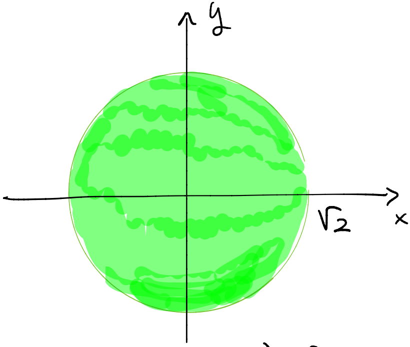
# Es. 5.

$$I = \iint_T x \cos(y^3)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

con

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 2\}$$

---




$I = 0$ !

Infatti:

1) T è simmetrico sia rispetto all' asse $x$, sia rispetto all' asse $y$

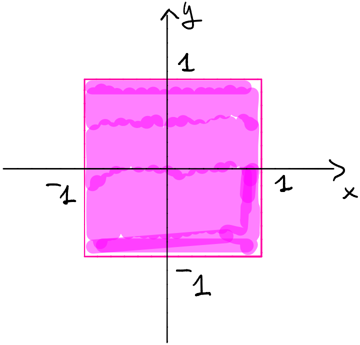
2) $f(x,y) = x \cos(y^3)$ è DISPARI in $x$,

infatti

$$f(-x,y) = -x\cos(y^3) = -f(x,y)$$

# Es. 6.

$$I = \iint_{[-1,1]\times[-1,1]} \left(x^2 + y^2 + x\sin(x^2 + y^4)\right)\, dx\,dy$$




$I = I_1 + I_2 + I_3$

con $I_1 = \iint_{[-1,1]\times[-1,1]} x^2\, dx\,dy$

$I_2 = \iint_{[-1,1]\times[-1,1]} y^2\, dx\,dy$

$I_3 = \iint x\sin(x^2+y^4)\,dx\,dy$

- $I_3 = 0$ : la fz. $f(x,y) = x \sin(x^2+y^4)$ è dispari in $x$, il dominio $[-1,1]\times[-1,1]$ è simmetrico rispetto all'asse $y$

- $I_1 = \frac{4}{3}$ (vedi Es. 4)

- $I_2 = I_1 = \frac{4}{3}$ (esercizio: verificarlo)

Quindi $I = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

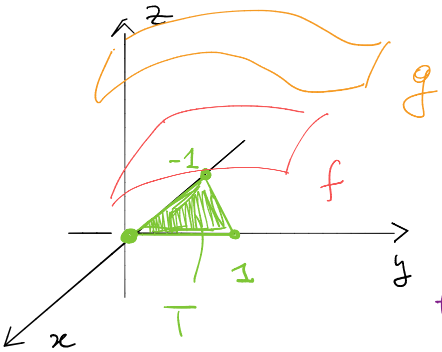
# Es. 7.

Calcolare il volume $V$ compreso fra i grafici delle funzioni

$$f(x,y) = x^2, \qquad g(x,y) = x^2 + y$$

sul triangolo di vertici $(-1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$.

---




Sia

$S_g$ = sottografico di $g$

$S_f$ = sottografico di $f$

La regione compresa fra graf($g$) e graf($f$) è

$= S_g \setminus S_f$

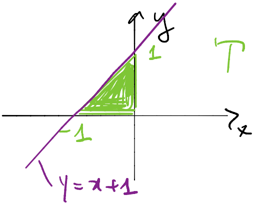
$\Rightarrow$ Il volume della regione compresa fra il grafico di g e il grafico di f è quindi

$$V = vol(S_g) - vol(S_f)$$

$$= \iint_T g(x,y)\,dx\,dy - \iint_T f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_T (x^2+y)\,dx\,dy - \iint_T x^2\,dx\,dy$$

$$= \iint_T y\,dx\,dy$$




T è un dominio normale rispetto all'asse delle x

(e anche rispetto all'asse y)

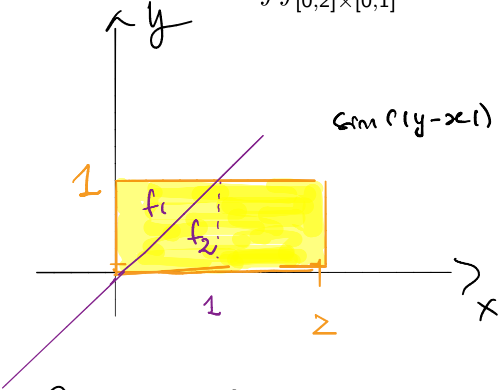
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -1 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq x+1\}$$

$$I = \int_{-1}^{0} \left( \int_{0}^{x+1} y \, dy \right) dx = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^2}{2} \, dx$$

$$= \left[ \frac{(x+1)^3}{6} \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{6}$$

# Es. 8.

$$I = \iint_{[0,2]\times[0,1]} \sin(|y-x|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

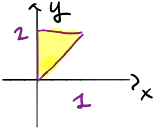



Esplicito il modulo

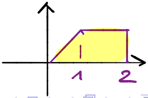
$$\sin(|y-x|) = \begin{cases} \overbrace{\sin(y-x)}^{f_1} & \text{se } y \geq x \\ \underbrace{\sin(x-y)}_{f_2} & \text{se } y \leq x \end{cases}$$

Quindi $R = [0,2]\times[0,1] = T_1 \cup T_2$

con $T_1$ :




e $T_2$



Per la proprietà additiva dell'integrale,

$$\iint_R \sin(|y-x|)\,dx\,dy =$$

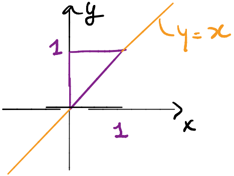
$$\iint_{T_1} \sin(|y-x|)\,dx\,dy + \iint_{T_2} \sin(|y-x|)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{T_1} \sin(y-x)\,dx\,dy + \iint_{T_2} \sin(x-y)\,dx\,dy$$

$$=: I_1 + I_2$$

Calcolo $I_1$ e $I_2$ separatamente

$I_1$:




$$T_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in [0,1],\ x \le y \le 1\}$$

Quindi

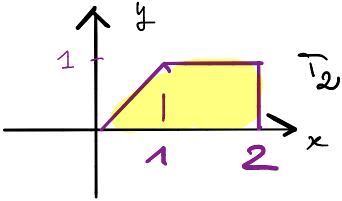
$$I_1 = \int_0^1 \left( \int_x^1 \sin(y-x)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \Big[ -\cos(y-x) \Big]_{y=x}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \left( \cos(0) - \cos(1-x) \right) dx =$$

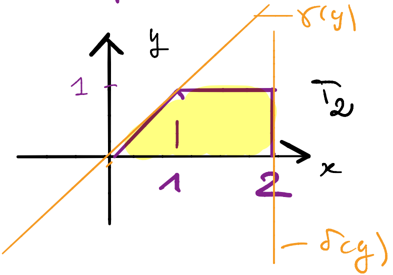
$$= 1 + \Big[ \sin(1-x) \Big]_0^1 = 1 - \sin(1)$$

$I_2$:




$T_2$ è unione di 2 domini normali rispetto all'asse x

Conviene vedere $T_2$ come dominio normale rispetto all'asse delle y




$\gamma(y)$:

$$y = x \iff x = y =: \gamma(y)$$

$\delta(y)$: $\quad x = 2 =: \delta(y)$

$$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 2\}$$

e quindi

$$I_2 = \iint_{T_2} \sin(x-y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[ \int_y^2 \sin(x-y)\, dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[ -\cos(x-y) \right]_{x=y}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^1 \left( \cos(0) - \cos(2-y) \right) dy$$

$$= 1 + \left[ \sin(2-y) \right]_0^1 = 1 + \sin(1) - \sin(2)$$

È quindi

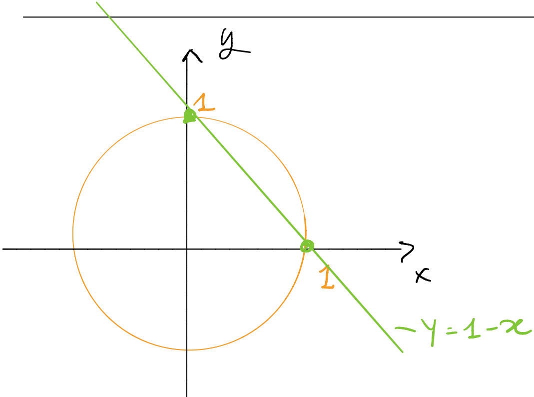
$$I = I_1 + I_2 = 2 - \sin(2)$$

# Es. 9.

$$I = \iint_T x^2 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

con

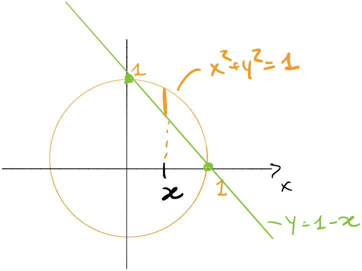
$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \ x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \ \text{ e } \ x + y - 1 \geq 0 \right\}.$$




$y \geq 1 - x$

T si può scrivere sia come dominio normale rispetto all'asse x, sia come dominio normale rispetto all'asse y (Es.)

Come dominio normale rispetto all'asse $x$:




$$T: \quad 0 \le x \le 1$$
$$1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y \ge 0 \\ \Rightarrow y = +\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Quindi $T = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\}$

Applico la corrispondente formula di riduzione

$$I = \int_0^1 \left( \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \left( \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \left( 1 - x^2 - (1-x)^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \left( \cancel{1} - x^2 - \cancel{1} - x^2 + 2x \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left( x^3 - x^4 \right) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

# Es. 10.

$$\iint_T \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

con

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le x \le e, \ 0 \le y \le x\}.$$

---

Esercizio: disegnare T, ma non è necessario: è già scritto come dominio normale rispetto all'asse x

$$I = \int_1^e \left( \int_0^x \frac{1}{x^2+y^2}\,dy \right) dx$$

$$= \int_1^e \left[ \int_0^x \frac{1}{x^2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} \, dy \right] dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x} \left[ \int_0^x \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} \, dy \right] dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x} \left( \left[ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right]_{y=0}^{y=x} \right) dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x} \left( \arctan(1) - \arctan(0) \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left[ \log(x) \right]_1^e = \frac{\pi}{4} .$$

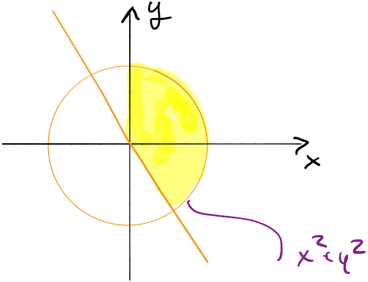
# Es. 11.

$$I = \iint_T (5xy^2 + 6)\, dxdy$$

dove

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : x^2 + y^2 < 1\,,\; x \geq 0\,,\; y \geq -x\}$$

---

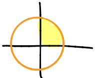



T NON è dominio normale rispetto all'asse x

(né rispetto all'asse y)

Conviene vedere

$T = T_1 \cup T_2$ con

$T_1$  e $T_2$ 

Quindi

$$\iint_T (5xy^2+6)\,dx\,dy = \iint_{T_1} (5xy^2+6)\,dx\,dy + \iint_{T_2} (5xy^2+6)\,dx\,dy$$

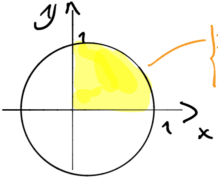
$$\iint_{T_1} 6\,dx\,dy = 6 \iint_{T_1} dx\,dy = 6\,\text{area}(T_1) = \frac{6\pi}{4}$$

$\hookrightarrow$ $T_1$ è $1/4$ del disco di $C=(0,0)$ e $R=1$

$$\iint_{T_2} 6\,dx\,dy = 6\,\text{area}(T_2) = 6\pi/8$$

$\hookrightarrow$ $T_2$ è $1/8$ del disco di $C=(0,0)$ e $R=1$

$$I_1 = \iint_{T_1} 5xy^2\,dx\,dy$$




$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$

$$T_1 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

$$I_1 = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 5xy^2\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 5x \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{(1-x^2)}} dx =$$

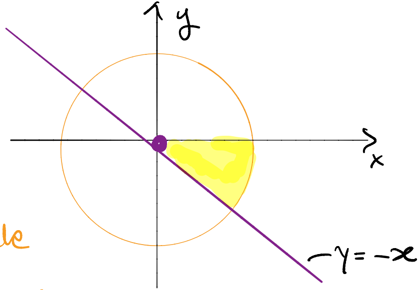
$$= 5 \int_0^1 x \, \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\, dx =$$

$$= 5\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^1 (-2)x \left(\frac{1-x^2)^{3/2}}{3}\right) dx$$

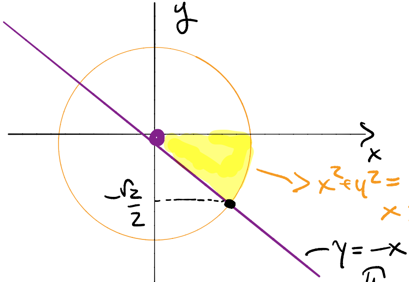
$$= -\frac{5}{6}\int_0^1 (1-x^2)^{3/2}\cdot(-2x)\,dx$$

$$= -5/6 \left[\frac{(1-x^2)^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}(-1) = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \iint_{T_2} 5xy^2\,dx\,dy$$




$T_2$: ← è dominio normale rispetto all' asse y




$T_2$: $\quad y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$

$$-y \le x \le \sqrt{1-y^2}$$

$\to x^2+y^2=1$, $x \ge 0$ $\Rightarrow x = \sqrt{1-y^2} = \delta(y)$

$\Downarrow$ $x = -y = \gamma(y)$

e quindi

$$\iint_{T_2} 5xy^2\,dx\,dy = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \left( \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} 5xy^2\,dx \right) dy$$

$$= 5\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} y^2 \left( \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx \right) dy$$

$$= 5\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} y^2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= \frac{5}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} y^2 \left[ 1-y^2 - (-y)^2 \right] dy$$

$$= \frac{5}{2} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} y^2 \left(1 - 2y^2\right) dy =$$

$$= \frac{5}{2} \left[ \frac{y^3}{3} - \frac{2y^5}{5} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} = \ldots\ldots$$