Integrali di superficie

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Richiami di teoria

- Sia $\mathcal{S} = \vec{r}(T)$ una superficie parametrica in $\mathbb{R}^3$, ove $T \subset \mathbb{R}^2$ è connesso e limitato e
  $\vec{r} : T \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r} \in C^1(T)$, è data da:
  $$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i}_1 + y(u,v)\vec{i}_2 + z(u,v)\vec{i}_3\,, \ (u,v) \in T$$
- Sia $g : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ limitata su $\mathcal{S}$, $g = g(x,y,z)$

Si definisce l'integrale di superficie di g su $\mathcal{S}$:

$$\iint_{\mathcal{S}} g(x,y,z)\, d\mathcal{S} := \iint_T g(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv$$

$$\text{con} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\vec{i}_1 + \dfrac{\partial y}{\partial u}\vec{i}_2 + \dfrac{\partial z}{\partial u}\vec{i}_3 \\[2ex] \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v}\vec{i}_1 + \dfrac{\partial y}{\partial v}\vec{i}_2 + \dfrac{\partial z}{\partial v}\vec{i}_3 \\[2ex] \underbrace{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}}_{\text{prodotto vettoriale di } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \text{ e } \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}} = \det \begin{bmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \end{cases}$$

In particolare:

$$\mathrm{Area}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} = \iint_{T} \left\| \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} \right\| dudv$$

Se $\mathcal{S}$ è data in forma cartesiana:

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in T,$$

allora:

$$\iint_{\mathcal{S}} g(x,y,z)\, d\mathcal{S} = \iint_{T} g(x,y,f(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

e

$$\mathrm{Area}(\mathcal{S}) = \iint_{T} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

Es. 1.

L'area $\mathcal{A}$ della porzione di paraboloide

$$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$
$$\text{con } (x,y) \in T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 8\right\}.$$

Es. 2.

L'area $\mathcal{A}$ della porzione di *paraboloide iperbolico*

$$z = x^2 - y^2$$

racchiusa nel cilindro solido infinito

$$\mathcal{C} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Es. 3.

$$I = \iint_S x^2 \, ds$$

ove S è la superf.

$$\vec{r}(u,v) = 3\cos(u)\,\vec{i}_1 + 3\sin(u)\,\vec{i}_2 + v\,\vec{i}_3, \qquad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [1, 5].$$

Es. 4.

$$I = \iint_S g(x, y, z)\, ds$$

con

$$g(x, y, z) = 2x + \frac{4}{3}y + z$$

e S è la porzione di superficie del piano

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1,$$

contenuta in $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x \geq 0, \, y \geq 0, \, z \geq 0\}$.

Es. 6.

$$I = \iint_S (z - y^2)\left(1 + 16x^2 + 16y^2\right)^{-1/2}\, ds,$$

e

$$S: \; z = f(x,y) = 2x^2 + y^2$$
$$\text{con} \;\; (x,y) \in T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\; x^2 \leq y \leq |x|\right\},$$
