

Integrali di Riemann immediati

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Integrali indefiniti

Siano $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione. Il simbolo

$$\int f(x) dx$$

indica l'insieme delle *primitive* di f , cioè l'insieme delle $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} F \text{ è derivabile su } I, \\ \forall x \in I : F'(x) = f(x). \end{cases}$$

Le primitive di f differiscono tutte per una costante arbitraria:

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

ove F è una (qualsiasi) primitiva di f .

Esercizio 1.

$$\int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[5]{x} + 2 \right) dx$$

Esercizio 2.

$$\int \frac{\cos^3(x) + 5}{\cos^2(x)} dx$$

Esercizio 3.

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$$

Esercizio 4.

$$\int \cos(2x) dx$$

Esercizio 5.

$$\int x e^{-x^2} dx$$

Esercizio 6.

$$\int (2x - 3)^3 dx$$

Esercizio 7.

$$\int \sqrt[4]{(x-2)^3} dx$$

Esercizio 8.

$$\int x^2 \cos(x^3) dx$$

Esercizio 9.

$$\int \cos(x) \sin^4(x) dx$$

Esercizio 10.

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Esercizio 11.

$$\int \left(\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

Esercizio 12.

$$\int \frac{1 - \cos(x)}{\sin^2(x)} dx$$

Esercizio 13.

$$\int \sin(x)e^{\cos(x)} dx$$

Esercizio 14.

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

Esercizio 15.

$$\int \frac{1}{e^x + 3} dx$$

Esercizio 16.

$$\int \frac{(x+1)^2}{x^3} dx \quad \text{sull'intervallo } I = (0, +\infty)$$

Esercizio 17.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \quad \text{sull'intervallo } (-1, 1)$$

Esercizio 18.

$$\int \cos^2(x) dx$$

Esercizio 19.

$$\int \sin^3(x) dx$$

Esercizio 20.

$$\int \sin(2x) \sin(5x) dx$$

Ricordiamo

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta), \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta),\end{aligned}$$

quindi

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Esercizio 21.

$$\int \frac{3 \sin^2(x)}{2 + 2 \cos(x)} dx$$

sull'intervallo $[0, \pi/2]$.

Esercizio 22.

Sia f la primitiva di

$$g(x) = \frac{e^x}{\cosh(x)}$$

tale che $f(0) = \ln(2)$. Calcolare $f(\ln(2))$.

Integrali definiti: il secondo teorema fondamentale del calcolo

Teorema

Siano $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $a, b \in I$, e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora

$$\int f(x) dx = F(b) - F(a),$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f su I .

Esercizio 23.

$$\int_1^3 \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Esercizio 24.

$$\int_{2/\pi}^{3/\pi} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Esercizio 25.

$$\int_0^1 \frac{\sin(2x)}{7 + \sin^2(x)} dx$$

Esercizio 26.

Calcolare l'area A compresa tra i grafici delle funzioni

$$f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad g(x) = x + 1.$$

Esercizio 27.

$$\int_1^4 |2 - x| dx$$

Esercizio 28.

$$\int_0^{\pi/2} |\sin(x) - \cos(x)| dx$$

Esercizio 29.

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{1 + \cos(x)} \, dx$$
