Integrali delle funzioni razionali fratte

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi B

Es. 1.

$$\int \frac{1}{x^2 - x} \, \mathrm{d}x$$

nell'intervallo $J = (1, +\infty)$.

- $x^2 - x = x(x-1)$ ha le due radici reali $x = 0$ e $x = 1$ $\Rightarrow$ Cerco A, $B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

Es. 2.

$$I = \int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$$

Es. 3.

$$I = \int \frac{1}{2x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x$$

Es. 4.

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{t^2+3t+4}{t^2+4t+5}\,\mathrm{d}t$$

1: riduzione di grado del numeratore

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} \frac{t^2+3t+4}{t^2+4t+5}\,\mathrm{d}t &= \int_{-2}^{-1} \frac{t^2+4t+5-t-1}{t^2+4t+5}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-2}^{-1} 1\,\mathrm{d}t - \int_{-2}^{-1} \frac{t+1}{t^2+4t+5}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

2: calcolo

$$\int_{-2}^{-1} \frac{t+1}{t^2+4t+5}\,\mathrm{d}t$$

3: calcolo

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^2 + 4t + 5} \, \mathrm{d}t$$

evidenziando la somma di 1 e del quadrato di un binomio

Es. 5.

$$I = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-4)}\,\mathrm{d}x \quad \text{sull'intervallo } (2,4).$$

Si ha

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}$$

per A, B, $C = \dots\dots$

Es. 6.

$$I = \int \frac{1}{x^4 - 1} \, \mathrm{d}x$$

Si ha

$$(x^4 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

Quindi cerco $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Es. 7.

$$I = \int \frac{1}{(x-1)(x^2+3)}\,\mathrm{d}x$$

Si ha

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

per $A,\ B,\ C = \ldots\ldots$

Es. 8.

$$I = \int \frac{1}{x^3(x-2)}\,\mathrm{d}x$$

N.B.: il fattore x ha molteplicità 3. Cerco A, B, C, $D \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{1}{x^3(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2}$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{8}\ln(|x|) + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{8}\ln(|x-2|) + c}$$

Es. 9.

$$I = \int_0^3 \frac{3x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

<u>Trucco:</u>

$$I = 3\int_0^3 \frac{x}{(1+x^2)^2}\cdot x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^3 \overbrace{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}^{f'}\cdot \overbrace{x}^{g}\,\mathrm{d}x$$