L'integrale di Riemann

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi B

Panoramica

Parte I – Teoria dell'integrazione

Parte II - I teoremi fondamentali del calcolo

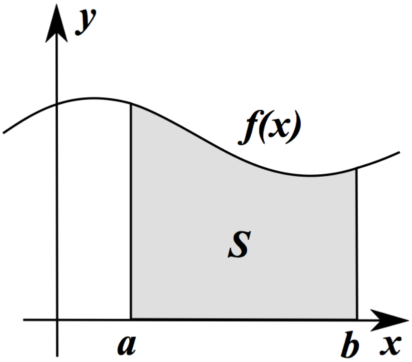
Tecniche per il calcolo di integrali definiti

Motivazioni: calcolo di un'area

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ <u>continua</u> e **positiva**.

Problema

Calcolare l'area A della regione di piano (detta *sottografico* di f) compresa tra il grafico di f e l'asse delle x???



Un problema antico..

- **Archimede di Siracusa** (287 a.C. – 212 a.C.): <u>metodo di esaustione</u> per il area cerchio/area sottesa da ramo di parabola
- **P. Fermat** (1636) / **N. Mercator** (1668): metodi <u>ad hoc</u> per area del sottografico di semplici funzioni
- **I. Newton** (1642–1727) / **G. Leibniz** (1646–1716)/ **J. Bernoulli** (1667–1748): teoremi fondamentali del calcolo integrale $\rightsquigarrow$ legami fra il calcolo di integrali e la ricerca di primitive
- **G. Riemann** (1826–1866): formalizzazione matematica rigorosa del concetto di funzione integrabile e di integrale

Un procedimento di approssimazione

♣ Non è la definizione rigorosa di integrale!!!

- Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e **positiva**.

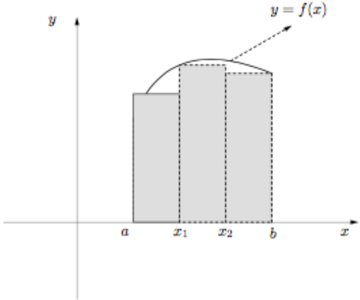
(1) Consideriamo una suddivisione $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ di $[a, b]$:

$$x_0 = a, \quad x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Siano $I_j := [x_j, x_{j+1}]$ e A_j l'area di regione piana compresa fra $\mathrm{graf(f)}$, f ristretta a I_j, e l'asse x.

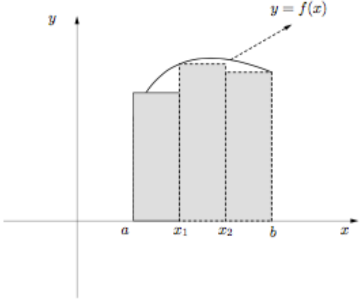
(2) Poiché f è <u>continua</u>, se I_j è "abbastanza piccolo", la variazione di f su I_j sarà "piccola": $\sim f$ costante su I_j. Quindi un'approssimazione dell'area A_j è

$A_j \sim f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$
con ξ_j un punto arbitrario di I_j



(3) Allora un'approssimazione di A (area del sottografico) è data dalla somma delle approssimazioni delle aree A_j, cioè
$A \sim \tilde{A} = \sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$
con ξ_j un punto arbitrario di I_j

Ci si aspetta che all'aumentare dei punti di suddivisione di $[a, b]$, il valore $\tilde{A}$ sia un'approssimazione sempre migliore di A.



Definizione di integrale di Riemann – 1

Siano

- $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (chiuso) e limitato
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, cioè

$$\exists\, M \geq 0 : \quad \forall\, x \in [a, b] \quad -M \leq f(x) \leq M.$$

Sotto queste **ipotesi di base** daremo la definizione di integrale di Riemann.

N.B.: d'ora in poi, **NON** supporremo che

- f sia continua su $[a, b]$: daremo la definizione di integrale di Riemann per una classe più ampia di funzioni!!
- f sia positiva su $[a, b]$: si perderà l'interpretazione geometrica di integrale $\sim$ area!!

Definizione di integrale di Riemann – 2

Definizioni preliminari

(1) Diciamo che $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ è una **suddivisione** di $[a, b]$ se

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Si ha $[a, b] = \bigcup_{j=0}^{n} I_j$, $\qquad I_j = [x_j, x_{j+1}]$.

(2) Date due suddivisioni D_1 e D_2 di $[a, b]$, D_2 è più fine di D_1 se

$$D_1 \subset D_2$$

Definizione di integrale di Riemann – 3

Definizioni preliminari

(3) Sia $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$: diciamo che

$$\Sigma(f, D) = \sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

è una **somma di Riemann** di f relativa alla suddivisione D.

Definizione di integrale di Riemann – 3

Definizioni preliminari

(4) Poniamo

$$\mathrm{s}(f,D) := \sum_{j=0}^{n} \left[\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$

$$\mathrm{S}(f,D) := \sum_{j=0}^{n} \left[\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$

$\mathrm{s}(f,D)$: **somma inferiore** associata a f e a D
$\mathrm{S}(f,D)$: **somma superiore** associata a f e a D.

Osservazioni

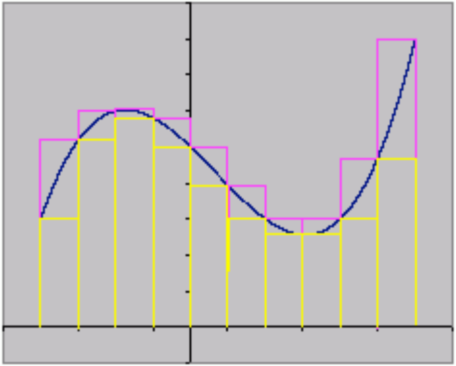
(1) Queste **definizioni hanno senso perché** f **è limitata su** $[a,b]$

Osservazioni

(2) Per ogni suddivisione D e per somma di Riemann $\Sigma(f,D)$,

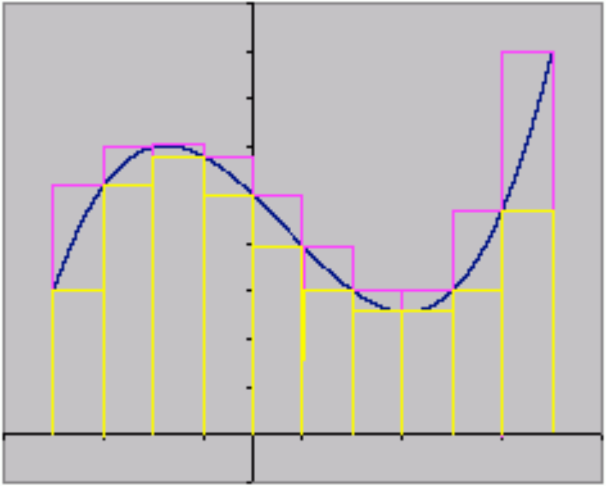
$$\mathrm{s}(f,D) \leq \Sigma(f,D) \leq \mathrm{S}(f,D)$$

Se $\boxed{f \geq 0}$, allora $s(f, D)$ e $S(f, D)$ assumono un preciso significato geometrico.



■ Sia $\boxed{f \geq 0}$ e sia A l'area del sottografico di f. Allora
Per ogni suddivisione D si ha

$$\mathrm{s}(f, D) \leq A \leq \mathrm{S}(f, D)$$



Conseguenze del confronto fra due suddivisioni...

Sia $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ limitata e siano D_1, D_2 due suddivisioni di $[a, b]$. Allora

1. $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$.

2. Supponiamo che D_2 sia più fine di D_1:

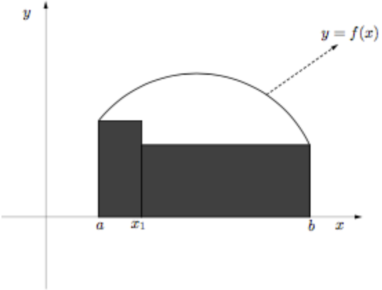
$$D_1 \subset D_2$$

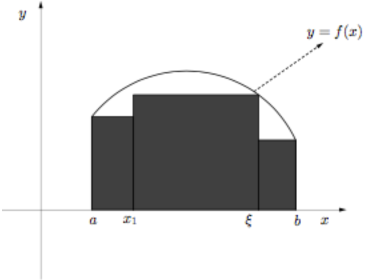
   Allora

$$\mathrm{s}(f, D_1) \leq \mathrm{s}(f, D_2)$$
$$\mathrm{S}(f, D_2) \leq \mathrm{S}(f, D_1)$$

   Raffinando la suddivisione di $[a, b]$ la somma inferiore cresce, mentre quella superiore decresce.

Per esempio, supponiamo che D_2 si ottenga aggiungendo un punto a D_1, e vediamo il comportamento delle somme inferiori





Definizione di integrale di Riemann – 4

Definizioni preliminari

(5) Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, definiamo **integrale inferiore** $\mathcal{I}'(f)$ e **integrale superiore** $\mathcal{I}''(f)$ di f su $[a,b]$ i numeri

$$\mathcal{I}'(f) := \sup_D \mathrm{s}(f,D) = \sup\left\{\mathrm{s}(f,D) :\ D \text{ suddivisione di } [a,b]\right\}$$

$$\mathcal{I}''(f) := \inf_D \mathrm{S}(f,D) = \inf\left\{\mathrm{S}(f,D) :\ D \text{ suddivisione di } [a,b]\right\}$$

- Si ha che

$$\boxed{\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}''(f)}$$

Definizione di integrale di Riemann – 5

Integrale di Riemann

Una funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice **integrabile secondo Riemann** nell'intervallo $[a, b]$ se

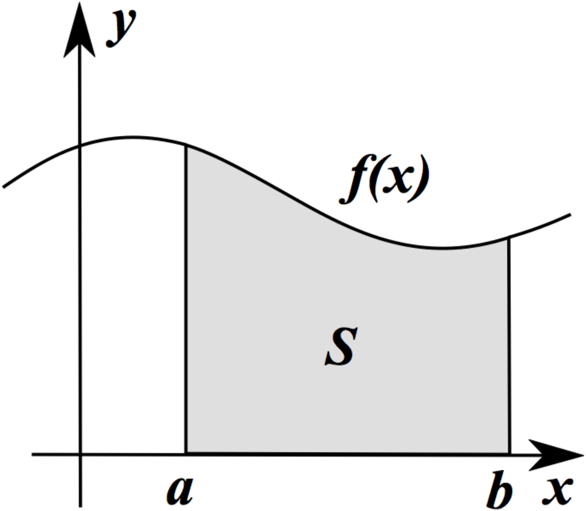
$$\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$$

In tal caso scriviamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$$

e chiamiamo $\int_a^b f(x)\,dx$ **integrale di Riemann** di f in $[a, b]$.

■ Se $f \geq 0$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ coincide con l'area A della regione di piano tra il grafico di f, l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$.

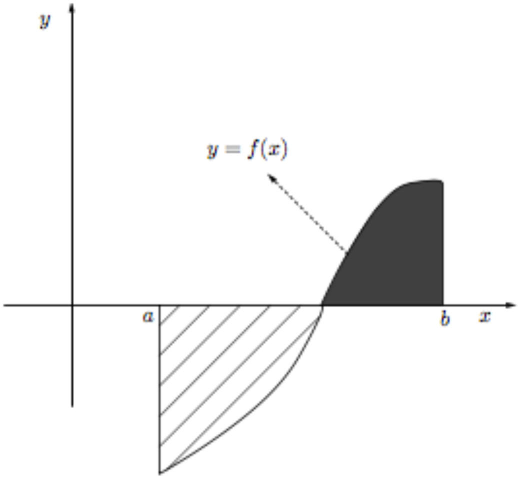


N.B.

L'interpretazione

$$\text{integrale} = \text{area}$$

si perde quando f NON è positiva



Teorema: condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione <u>limitata</u>. Allora f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione tale che

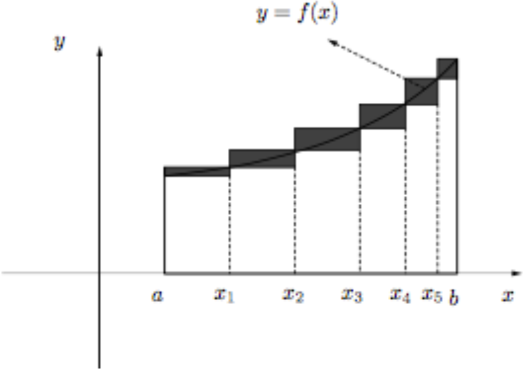
$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, D_\varepsilon \text{ suddivisione di } [a, b] \text{ t.c.}$$
$$\mathrm{S}(f, D_\varepsilon) - \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Inoltre, per ogni somma di Riemann $\Sigma(f, D_\varepsilon)$ associata a D_ε si ha

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \Sigma(f, D_\varepsilon) \right| < \varepsilon.$$

Interpretazione geometrica del criterio di integrabilità

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists D_\varepsilon \text{ suddivisione di } [a,b] \text{ t.c. } \quad \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) - \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$



Esempio di funzione limitata non integrabile

La funzione di Dirichlet $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esempio di funzione limitata non integrabile

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora per ogni suddivisione D si ha

$$\mathrm{s}(f,D) = \sum_{j=0}^{n} 0\,(x_{j+1} - x_j) = 0\,, \quad \mathrm{S}(f,D) = \sum_{j=0}^{n} 1\,(x_{j+1} - x_j) = 1$$

Quindi $\mathcal{I}'(f) = 0 < \mathcal{I}''(f) = 1$ e f non è integrabile secondo Riemann su $[0, 1]$.

Classi di funzioni integrabili

(1) Sono integrabili le funzioni **costanti** $f(x) \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$, e il valore del loro integrale di $[a, b]$ è

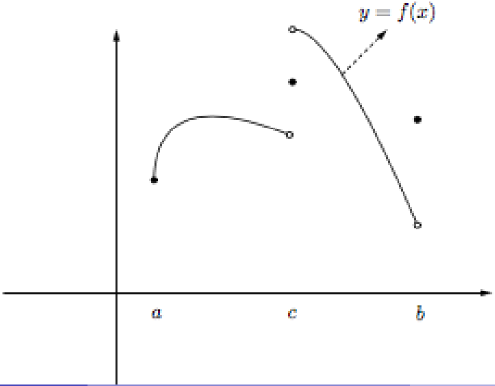
$$\int_a^b c\, dx = c(b - a).$$

(2) Sono integrabili le funzioni **continue** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Classi di funzioni integrabili

(3) Sono integrabili le funzioni **continue a tratti**: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti se esiste una suddivisione $S = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ di $[a, b]$ tale che f è continua su ogni intervallo aperto $]x_j, x_{j+1}[$ ed esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \to x_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_{j+1}^-} f(x).$$



Classi di funzioni integrabili

(4) Sono integrabili le funzioni **monotone**

(5) Sono integrabili le funzioni **limitate e monotone a tratti**.

Tutte queste condizioni sono **sufficienti**, non necessarie, per l'integrabilità.

Proprietà dell'integrale

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili. Allora, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$f + g, \qquad \lambda f, \qquad |f| \text{ sono integrabili,}$$
$$\forall [c, d] \subset [a, b] \quad f|_{[c,d]} \text{ è integrabile.}$$

Inoltre:

(a) **Proprietà di linearità** : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx;$$

(b) **Proprietà di confronto**: se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx;$$

(c) **Proprietà di additività**: $\forall\, c \in]a,b[$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

(d) **Confronto con il modulo**:

$$\left| \int_a^b f(x) \right| dx \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

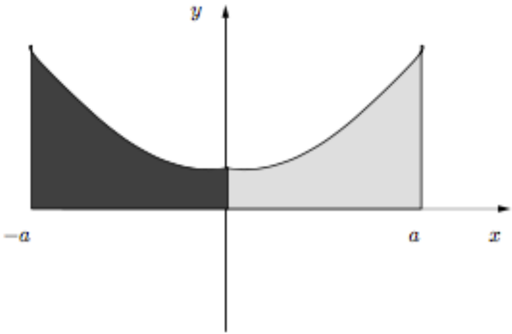
Simmetrie

Supponiamo che

$$f : [-a, a] \to \mathbb{R}, \quad [-a, a] \text{ intervallo simmetrico rispetto a origine}$$

- Se f è **pari** (cioè $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in [-a, a]$), allora

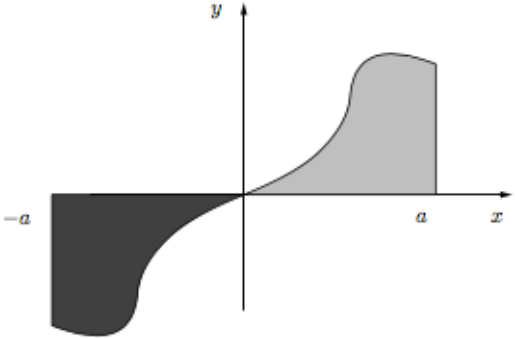
$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$



y
$-a$
a
x

- Se f è una funzione **dispari** (cioè $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in [-a, a]$) si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$



Convenzione sui segni

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile e siamo $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha < \beta$. Poniamo

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_\beta^\alpha f(x)\,dx := -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Con questa convenzione abbiamo che

per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$

si ha la formula di additività

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx.$$

La media integrale

Definizione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Chiamiamo *media integrale* di f su $[a, b]$ il valore

$$M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Teorema della media integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = M_f$, cioè

$$\exists\, c \in [a, b] \ : \quad \int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a).$$

Dimostrazione

La condizione che f sia continua **non può essere omessa**: consideriamo ad esempio la funzione $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ \\ 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Allora

$$M_f = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)\, dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 f(x)\, dx \right) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2},$$

Ma non esiste alcun punto $c \in [0,2]$ tale che $f(c) = \frac{3}{2}$.

Il problema della primitiva

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto. Data $f : I \to \mathbb{R}$, trovare $F : I \to \mathbb{R}$, derivabile, tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in I\,. \tag{$\star$}$$

Chiamiamo *primitiva* di f su I ogni funzione

$$F : I \to \mathbb{R}, \qquad \text{derivabile, verificante } (\star).$$

Esempi

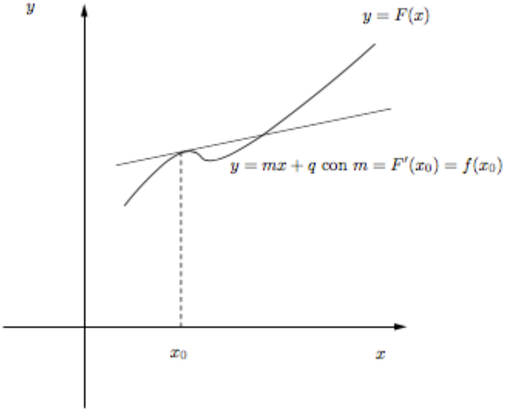
(1) $f(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$

(2) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$

(3) $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Interpretazione geometrica

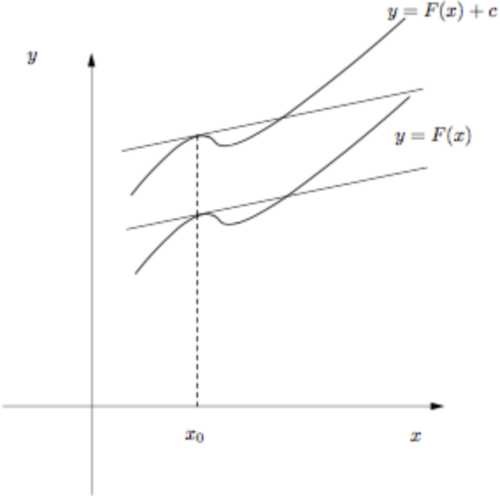
Una primitiva F di f è una funzione tale che per ogni x_0 la tangente al grafico di F nel punto x_0 è una retta il cui coefficiente angolare è proprio pari a $f(x_0)$.



Osservazione: non unicità delle primitive

Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Se f ammette una primitiva F su I, allora f ammette di fatto **infinite** primitive su I: si ha che

$$\forall\, c \in \mathbb{R} \text{ la funzione } x \in I \mapsto F(x) + c \text{ è una primitiva di } f.$$



Definizione

Data $f : I \to \mathbb{R}$, chiamiamo *integrale indefinito* di f (su I) l'insieme di tutte le primitive di f (su I), ammesso che ne esistano. Lo denotiamo con

$$\int f(x)\, dx\,.$$

• Abbiamo visto che, **se l'insieme delle primitive è non vuoto, esso contiene infinite funzioni**, in particolare tutte le funzioni del tipo

$$\{F + c \;:\; c \in \mathbb{R}\} \quad \text{con } F \text{ una particolare primitiva di } f.$$

In questo modo otteniamo **tutte le primitive di f???**

- Questo è **VERO** se f **è definita su un intervallo**

- Questo è **FALSO** se f **non è definita su un intervallo**

Esempio

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ (non è intervallo!)}$$

ammette come primitive tutte le funzioni della forma (con $c_1 \neq c_2$, in generale)

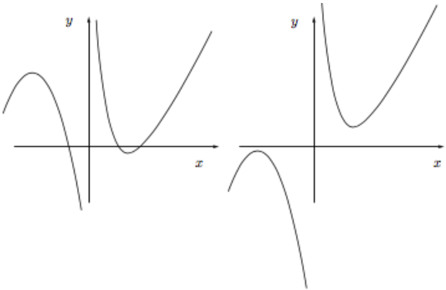
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + c_1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x} + c_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Data

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

il suo integrale indefinito è costituito dalle F

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + c_1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x} + c_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



♣ Ritorniamo a funzioni **definite su intervalli**.

Proposizione

sia I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, e F, $\tilde{F} : I \to \mathbb{R}$ due primitive di f sull'intervallo I. Allora esiste

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad \forall\, x \in I \quad \tilde{F}(x) = F(x) + c.$$

Dimostrazione:

Corollario: il teorema di struttura degli integrali indefiniti

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e supponiamo che essa ammetta una primitiva F. Allora l'integrale indefinito di f è dato da

$$\int f(x)\,dx = \{F + c \,:\, c \in \mathbb{R}\}\,.$$

Esempio

Una primitiva di $f(x) = x^2$ è $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Quindi $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$

Osservazioni:

(1) il calcolo di un integrale indefinito da' come risultato un insieme di (infinite) funzioni. Per selezionare una sola fra tutte le primitive di una assegnata f, è sufficiente imporre che, in un dato punto x_0, la primitiva assuma un assegnato valore y_0.

Osservazioni:

(2) Vale il teorema di linearità per gli integrali indefiniti: per ogni α, $\beta \in \mathbb{R}$, per ogni f, $g : I \to \mathbb{R}$ si ha

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int f(x)\ dx + \beta \int g(x)\ dx$$

Integrali indefiniti delle funzioni elementari

$$\forall\, r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad \int x^r \; dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c\,,$$

$$\int \frac{1}{x} \; dx = \ln(|x|) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \sin(\alpha x) \; dx = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \cos(\alpha x) \; dx = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \frac{1}{\cos^2(\alpha x)} \; dx = \int \left(1 + \tan^2(\alpha x)\right) \; dx = \frac{1}{\alpha}\tan(\alpha x) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int e^{\alpha x} \; dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \frac{1}{1 + \alpha^2 x^2} \; dx = \frac{1}{\alpha}\arctan(\alpha x) + c$$

Esempio:

Calcolare la primitiva (**l'unica!**) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di

$$f(x) = x^5 + \frac{1}{x^2 + 4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

tale che $F(0) = 3$.

Problema: esistenza di primitive?

Il **primo teorema fondamentale del calcolo** garantisce che, se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua su I, allora f ammette (infinite) primitive su I.

Definizione

Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Chiamiamo *funzione integrale* di f la funzione $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$A(x) := \int_c^x f(t)\, dt \quad \text{per ogni } x \in [a, b],$$

con $c \in [a, b]$ fissato.

Il primo teorema fondamentale del calcolo integrale

Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$. Sia $c \in [a, b]$ e sia $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale

$$A(x) := \int_c^x f(t)\, dt \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Allora A è derivabile per ogni $x \in]a, b[$, e si ha

$$A'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in]a, b[.$$

Come per il teorema della media, anche qui l'ipotesi di continuità su f è fondamentale: la funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ \\ 1 & \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

è integrabile in quanto continua a tratti, ma **non ammette alcuna primitiva**. Cioè non esiste alcuna funzione derivabile $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tale che

$$F'(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ \\ 1 & \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad (\star)$$

Infatti, se F soddisfa $(\star)$, allora si ha

$$F'_{+}(0) = 1, \qquad F'_{-}(0) = -1.$$

e quindi F non è derivabile in $x = 0$.

Corollario del Primo Teorema fondamentale del Calcolo

Le funzioni continue f su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ ammettono sempre una primitiva.

Tutte e sole le primitive di f si ottengono aggiungendo una costante arbitraria a

$$A(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

dove a è un elemento di I: quindi

processo di integrazione $\Rightarrow$ primitive di una funzione continua

Il secondo teorema fondamentale del calcolo

Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora per ogni $a, b \in I$ si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f.

Osservazione:

primitive di una funzione continua $\Rightarrow$ calcolo di integrali

(non si passa attraverso la definizione di integrale: somme superiori e inferiori!!)

Notazione: $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b\,.$$

Dimostrazione del secondo teorema fondamentale del calcolo