

# Integrazione per parti e per sostituzione

Riccarda Rossi

Università di Brescia

**Analisi B**

# Formula di integrazione per parti

## Integrazione per parti

Si applica all'integrazione di prodotti di funzioni

### Proposizione: formula di integrazione per parti

Sia  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo in  $\mathbb{R}$  e siano  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni derivabili con derivata continua (cioè  $f, g \in C^1(I)$ ).

Allora per ogni  $a, b \in I$  abbiamo che

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

# Dimostrazione





# Osservazioni

- la formula vale anche per integrali indefiniti

-

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

riconduce il calcolo di  $\int_a^b f'g$  al calcolo di  $\int_a^b fg'$  (la derivata è stata “scaricata” dalla  $f$  alla  $g$ ).

L'idea è: passare dall'“integrale difficile”  $\int_a^b f'g$  all'integrale “più semplice”  $\int_a^b fg'$ .

- Operativamente, per applicare l'integrazione per parti al calcolo di

$$\int_a^b h(x)k(x) dx$$

bisogna scegliere, fra  $h$  e  $k$ ,

- ▶ quale ha il ruolo di  $f'$ ,
- ▶ quale ha il ruolo di  $g$ .

è fondamentale scegliere bene quale delle due funzioni derivare e quale integrare.

## Miscellanea di integrali per parti

### Prodotto di un polinomio per una funzione trigonometrica

Sia  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione polinomiale e sia  $\alpha \neq 0$ :

$$\int_a^b P(x) \sin(\alpha x) dx \quad \left( \text{oppure} \int_a^b P(x) \cos(\alpha x) dx \right)$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sin(\alpha x) & (\text{oppure } f' \leftrightarrow \cos(\alpha x)) \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

**cioè integriamo la funzione trigonometrica e deriviamo il polinomio.**



## Esempio

$$I = \int_0^1 x \cos(2x) dx$$





Può essere necessario applicare l'integrazione per parti ripetutamente,

## Esempio

$$I = \int_1^2 x^3 \sin(x) dx$$











## Prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale.

Sia  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione polinomiale e sia  $\alpha \neq 0$ .

$$\int P(x)e^{\alpha x} dx.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow e^{\alpha x}, \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

**cioè integriamo la funzione esponenziale e deriviamo il polinomio.**

## Esempio

$$I = \int_0^2 x e^{2x} dx$$









## Prodotto di un polinomio per una funzione iperbolica.

Sia  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione polinomiale e sia  $\alpha \neq 0$ :

$$\int_a^b P(x) \sinh(\alpha x) dx \quad \left( \text{oppure } \int_a^b P(x) \cosh(\alpha x) dx \right)$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sinh(\alpha x) & (\text{oppure } f' \leftrightarrow \cosh(\alpha x)) \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

**cioè integriamo la funzione iperbolica e deriviamo il polinomio.**

## Prodotto di un polinomio per una funzione logaritmica.

Sia  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione polinomiale e sia  $\alpha \neq 0$ . Siano  $0 < a < b$ :

$$\int_a^b P(x) \ln(\alpha x) dx.$$

*Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte*

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \ln(\alpha x), \end{cases}$$

**cioè integriamo il polinomio e deriviamo la funzione logaritmica.**



## Esempio

$$I = \int_1^3 x \ln(2x) dx$$





## Esempio

$$I = \int \ln(x) dx$$





## Prodotto di un polinomio per l'arcotangente.

Sia  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione polinomiale e sia  $\alpha \neq 0$ .

$$\int_a^b P(x) \arctan(\alpha x) dx.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \arctan(\alpha x), \end{cases}$$

**cioè integriamo il polinomio e deriviamo la funzione arcotangente.**

## Esempio

$$I = \int_0^1 x \arctan(x) dx$$







# Integrazione per sostituzione

## Esempio

Come integrare

$$\int_0^1 \sin^2(t) \arctan(\sin(t)) \cos(t) dt??$$

Intuitivamente: ponendo

$$x = \sin(t), \quad \text{cioè} \quad t = \arcsin(x),$$

ottengo il termine  $x^2 \arctan(x)$ , che so come trattare (integrando per parti).

- Come diventa il termine  $\cos(t) dt$ ?
- come diventano gli estremi di integrazione?

La formula di integrazione per sostituzione ci dice come si trasforma l'integrale dopo il cambiamento di variabile

$$x = \varphi(t) \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(x)$$

tramite una  $\varphi$  invertibile.

## Formula di integrazione per sostituzione

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $x = \varphi(t)$  un cambiamento di variabile tale che

$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  è invertibile e derivabile con derivata continua:  $\varphi \in C^1(I)$ .

Allora

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

- Vi è anche una versione per gli integrali indefiniti.

**Dimostrazione:** Sia  $F$  una primitiva di  $f$ . Quindi

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Per l'ipotesi la funzione  $F(\varphi(t))$  è derivabile e vale

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Dunque

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (F(\varphi(t)))' dt \\ &= F(\varphi(\varphi^{-1}(b))) - F(\varphi(\varphi^{-1}(a))) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \quad \blacksquare \end{aligned}$$

♣ Osservazione:

- integrazione per parti  $\sim$  integrazione di un prodotto di funzioni  $\rightsquigarrow$  la dimostrazione della formula di integ. per parti è basata su formula per la derivata del prodotto di funzioni
- integrazione per sostituzione  $\sim$  integrazione tramite cambiamento di variabile  $\rightsquigarrow$  la dimostrazione della formula di integ. per sostituzione è basata su formula per la derivata della composizione di funzioni

## Struttura di

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

$$f(x) \rightsquigarrow f(\varphi(t))$$

$$dx \rightsquigarrow \varphi'(t) dt$$

$$\int_a^b \rightsquigarrow \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}$$

## Esempio iniziale

$$I = \int_0^1 \sin^2(t) \arctan(\sin(t)) \cos(t) dt$$







**Strategia** per integrare funzioni che contengono termini con radicali:  
effettuare la sostituzione in modo da *eliminare* il radicale.

### Esempio 1

$$I = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx.$$









## Esempio 2

$$I = \int_0^1 s^3 e^{s^2} ds.$$









