L'integrale di Riemann

Riccarda Rossi

Università di Brescia

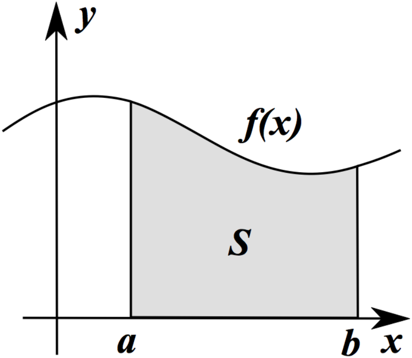
Analisi B

Motivazioni: calcolo di un'area

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e **positiva**.

Problema

Calcolare l'area A della regione di piano (detta *sottografico* di f) compresa tra il grafico di f e l'asse delle x???



Un procedimento di approssimazione

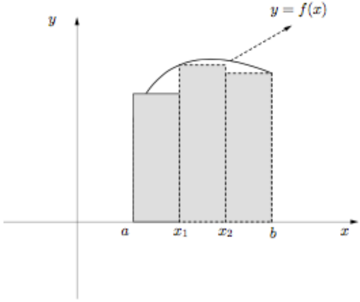
(1) Consideriamo una suddivisione $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ di $[a, b]$:

$$x_0 = a, \quad x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Siano $I_j := [x_j, x_{j+1}]$ e A_j l'area di regione piana compresa fra $\mathrm{graf(f)}$, f ristretta a I_j, e l'asse x.

(2) Poiché f è continua, se I_j è "abbastanza piccolo", la variazione di f su I_j sarà "piccola": $\sim f$ costante su I_j. Quindi un'approssimazione dell'area A_j è

$A_j \sim f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$
con ξ_j un punto arbitrario di I_j



(3) Allora un'approssimazione di A è data dalla somma delle A_j, cioè

$$A \sim \tilde{A} = \sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j).$$

(4) Ci si aspetta che all'aumentare dei punti di suddivisione di $[a, b]$, il valore $\tilde{A}$ sia un'approssimazione sempre migliore di A.

.... ora: formalizzazione matematica <u>rigorosa</u> di queste idee.

Definizione di integrale di Riemann – 1

Siano

- $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (chiuso) e limitato
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, cioè

$$\exists\, M \geq 0 : \quad \forall\, x \in [a, b] \quad -M \leq f(x) \leq M.$$

Sotto queste **ipotesi di base** daremo la definizione di integrale di Riemann.

N.B.: d'ora in poi, **NON** supporremo che

- f sia continua su $[a, b]$: daremo la definizione di integrale di Riemann per una classe più ampia di funzioni!!
- f sia positiva su $[a, b]$: si perderà l'interpretazione geometrica di integrale $\sim$ area!!

Definizione di integrale di Riemann – 2

Definizioni preliminari

(1) Diciamo che $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ è una **suddivisione** di $[a, b]$ se

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Si ha $[a, b] = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$, $\qquad I_j = [x_{j-1}, x_j]$.

(2) Date due suddivisioni D_1 e D_2 di $[a, b]$, D_1 è più fine di D_2 se

$$D_2 \subset D_1$$

(3) Sia $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$: diciamo che

$$\Sigma(f, D) = \sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

è una **somma di Riemann** di f relativa alla suddivisione D.

Definizione di integrale di Riemann – 3

Definizioni preliminari

(4) Poniamo

$$\mathrm{s}(f, D) := \sum_{j=0}^{n} \left[\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$

$$\mathrm{S}(f, D) := \sum_{j=0}^{n} \left[\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$

$\mathrm{s}(f, D)$: **somma inferiore** associata a f e a D
$\mathrm{S}(f, D)$: **somma superiore** associata a f e a D.

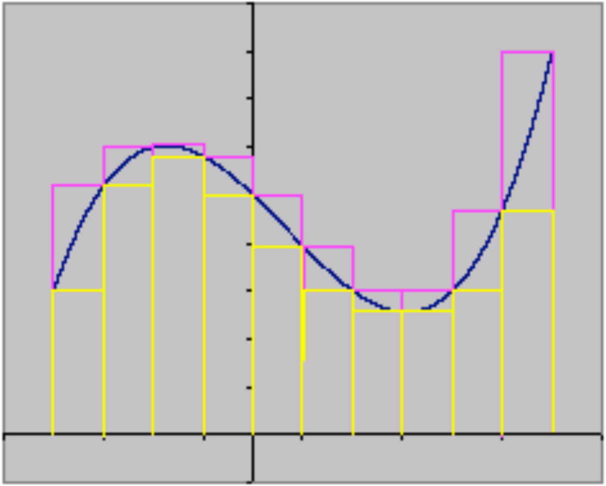
Osservazioni

- Queste **definizioni hanno senso perché f è limitata su** $[a, b]$
- Per ogni suddivisione D e per somma di Riemann $\Sigma(f, D)$,

$$\mathrm{s}(f, D) \leq \Sigma(f, D) \leq \mathrm{S}(f, D)$$

Se $f \geq 0$ (con A l'area del sottografico di f), allora $s(D, f)$ e $S(D, f)$ assumono un preciso significato geometrico. Per ogni suddivisione D si ha

$$\mathrm{s}(f, D) \leq A \leq \mathrm{S}(f, D)$$



Come confrontare due suddivisioni?

Sia $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ limitata e siano D_1, D_2 due suddivisioni di $[a, b]$. Allora

1. $s(D_1, f) \leq S(D_2, f)$.
2. Supponiamo che D_2 sia più fine di D_1:

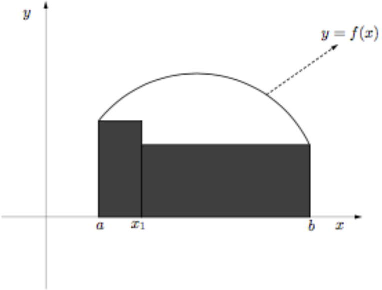
$$D_1 \subset D_2$$

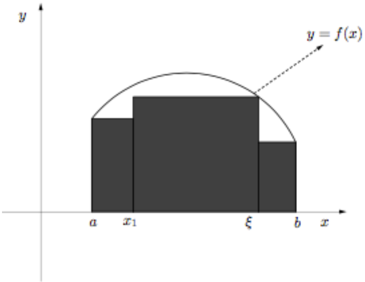
Allora

$$\mathrm{s}(f, D_1) \leq \mathrm{s}(f, D_2)$$
$$\mathrm{S}(f, D_2) \leq \mathrm{S}(f, D_1)$$

Raffinando la suddivisione di $[a, b]$ la somma inferiore cresce, mentre quella superiore decresce.

Per esempio, supponiamo che D_2 si ottenga aggiungendo un punto a D_1, e vediamo il comportamento delle somme inferiori





Definizione di integrale di Riemann – 4

Definizioni preliminari

(5) Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, definiamo **integrale inferiore** $\mathcal{I}'(f)$ e **integrale superiore** $\mathcal{I}''(f)$ di f su $[a, b]$ i numeri

$$\mathcal{I}'(f) := \sup_D \mathrm{s}(f, D) = \sup \left\{ \mathrm{s}(f, D) : \ D \text{ suddivisione di } [a, b] \right\}$$

$$\mathcal{I}''(f) := \inf_D \mathrm{S}(f, D) = \inf \left\{ \mathrm{S}(f, D) : \ D \text{ suddivisione di } [a, b] \right\}$$

Si ha che

$$\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}''(f)$$

Definizione di integrale di Riemann – 5

Integrale di Riemann

Una funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice **integrabile secondo Riemann** nell'intervallo $[a, b]$ se

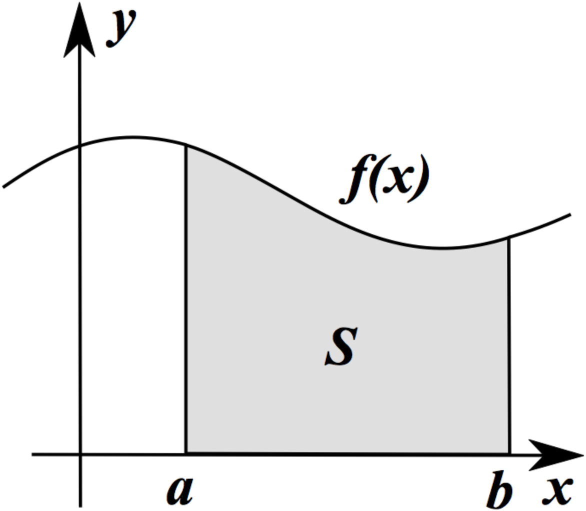
$$\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$$

In tal caso scriviamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$$

e chiamiamo $\int_a^b f(x)\,dx$ **integrale di Riemann** di f in $[a, b]$.

■ Se $f \geq 0$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ coincide con l'area A della regione di piano tra il grafico di f, l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$.

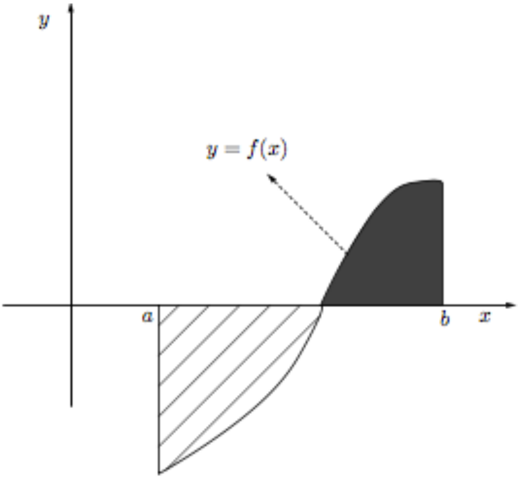


N.B.

L'interpretazione

$$\text{integrale} \; = \; \text{area}$$

si perde quando f NON è positiva



Teorema: condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione <u>limitata</u>. Allora f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione tale che

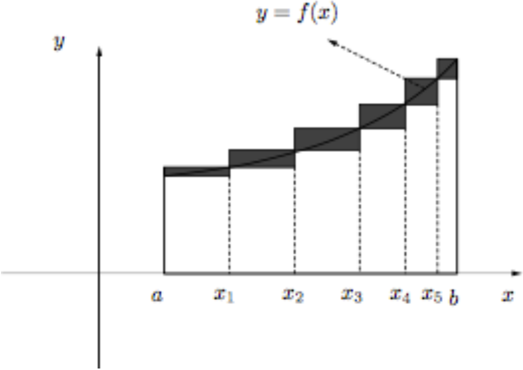
$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, D_\varepsilon \text{ suddivisione di } [a, b] \text{ t.c.}$$
$$\mathrm{S}(f, D_\varepsilon) - \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Inoltre, per ogni somma di Riemann $\Sigma(f, D_\varepsilon)$ associata a D_ε si ha

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \Sigma(f, D_\varepsilon) \right| < \varepsilon.$$

Interpretazione geometrica del criterio di integrabilità

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists D_\varepsilon \text{ suddivisione di } [a, b] \text{ t.c. } \quad \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) - \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$



Esempio di funzione limitata non integrabile

La funzione di Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora per ogni suddivisione D si ha

$$\mathrm{s}(f,D) = \sum_{j=1}^{n} 0\,(x_j - x_{j-1}) = 0\,, \quad \mathrm{S}(f,D) = \sum_{j=1}^{n} 1\,(x_j - x_{j-1}) = 1$$

Quindi $\mathcal{I}'(f) = 0$ e $\mathcal{I}''(f) = 1$ e f non è integrabile secondo Riemann.

Classi di funzioni integrabili

(1) Sono integrabili le funzioni **costanti** $f(x) \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$, e il valore del loro integrale di $[a, b]$ è

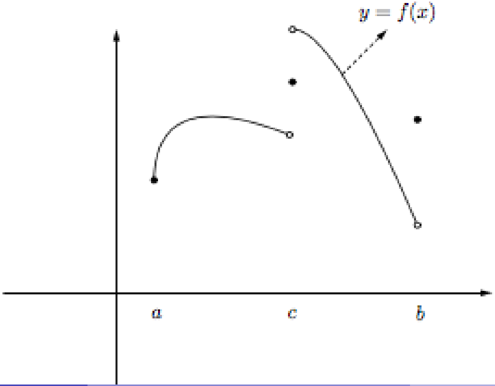
$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

(2) Sono integrabili le funzioni **continue** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Classi di funzioni integrabili

(3) Sono integrabili le funzioni **continue a tratti**: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti se esiste una suddivisione $S = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ di $[a, b]$ tale che f è continua su ogni intervallo aperto $]x_j, x_{j+1}[$ ed esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \to x_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_{j+1}^-} f(x).$$



Classi di funzioni integrabili

(4) Sono integrabili le funzioni **monotone**

(5) Sono integrabili le funzioni **limitate e monotone a tratti**.

Tutte queste condizioni sono **sufficienti**, non necessarie, per l'integrabilità.

Proprietà dell'integrale

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili. Allora, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$f + g, \qquad \lambda f, \qquad |f| \text{ sono integrabili,}$$
$$\forall\, [c, d] \subset [a, b] \quad f|_{[c,d]} \text{ è integrabile.}$$

Inoltre:

(a) **Proprietà di linearità** : $\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx;$$

(b) **Proprietà di confronto**: se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, si ha

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx;$$

(c) **Proprietà di <u>additività</u>**: $\forall\, c \in]a, b[$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

(d) **Confronto con il modulo**:

$$\left|\int_a^b f(x)\right|\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

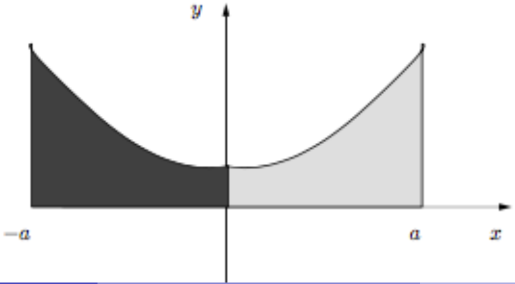
Simmetrie

Supponiamo che

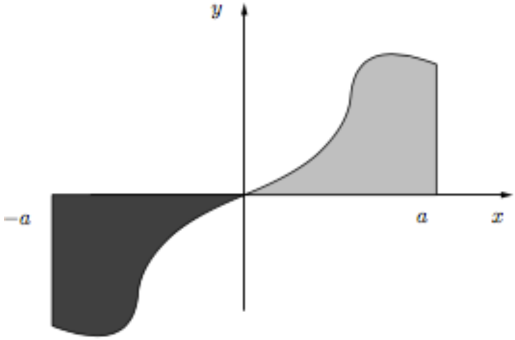
$$f : [-a, a] \to \mathbb{R}, \quad [-a, a] \text{ intervallo simmetrico rispetto a origine}$$

- Se f è **pari** (cioè $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in [-a, a]$), allora

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$



- Se f è una funzione **dispari** (cioè $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in [-a, a]$) si ha
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$



Convenzione sui segni

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile e siamo $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha < \beta$. Poniamo

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_\beta^\alpha f(x)\,dx := -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Con questa convenzione abbiamo che

per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$

si ha la formula di <u>additività</u>

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx.$$

La media integrale

Definizione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Chiamiamo *media integrale* di f su $[a, b]$ il valore

$$M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema della media integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = M_f$, cioè

$$\exists\, c \in [a, b] \ : \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Dimostrazione: Per il Teorema di Weierstrass f assume su $[a, b]$ sia il minimo m che il massimo M. Quindi vale

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Adesso integriamo le funzioni m, f, M su $[a, b]$; dalla proprietà del confronto e dalla disuguaglianza sopra segue

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a).$$

Dunque

$$m \leq M_f \leq M.$$

Siccome f è continua, il Teorema dei valori intermedi implica che f assume tutti i valori tra m e M e quindi anche M_f, cioè esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = M_f$. ∎

La condizione che f sia continua **non può essere omessa**: consideriamo ad esempio la funzione $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ data da

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ \\ 2 & 1\le x\le 2\end{cases}$$

Allora

$$M_f=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{2}(1+2)=\frac{3}{2},$$

Ma non esiste alcun punto $c\in[0,2]$ tale che $f(c)=\frac{3}{2}$.

Il problema della primitiva

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto. Data $f : I \to \mathbb{R}$, trovare $F : I \to \mathbb{R}$, derivabile, tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in I\,. \tag{$\star$}$$

Chiamiamo *primitiva* di f su I ogni funzione

$$F : I \to \mathbb{R}, \qquad \text{derivabile, verificante } (\star).$$

Esempi

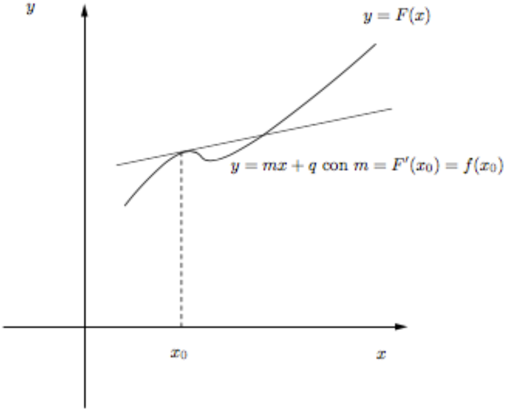
(1) $f(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$

(2) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$

(3) $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Interpretazione geometrica

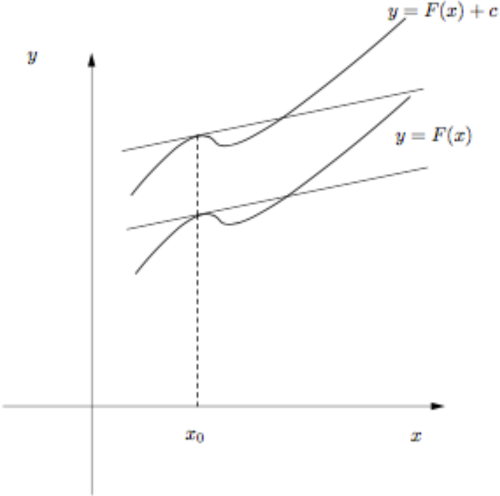
Una primitiva F di f è una funzione tale che per ogni x_0 la tangente al grafico di F nel punto x_0 è una retta il cui coefficiente angolare è proprio pari a $f(x_0)$.



Osservazione: non unicità delle primitive

Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Se f ammette una primitiva F su I, allora f ammette di fatto **infinite** primitive su I: si ha che

$$\forall\, c \in \mathbb{R} \text{ la funzione } x \in I \mapsto F(x) + c \text{ è una primitiva di } f.$$



Definizione

Data $f : I \to \mathbb{R}$, chiamiamo *integrale indefinito* di f (su I) l'insieme di tutte le primitive di f (su I), ammesso che ne esistano. Lo denotiamo con

$$\int f(x)\, dx\,.$$

• Abbiamo visto che, **se l'insieme delle primitive è non vuoto, esso contiene infinite funzioni**, in particolare tutte le funzioni del tipo

$$\{F + c \ : \ c \in \mathbb{R}\} \ \text{ con } F \text{ una particolare primitiva di } f.$$

In questo modo otteniamo **tutte le primitive di f???**

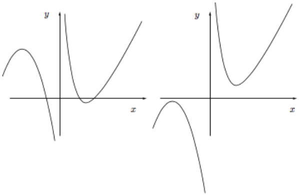
- Questo è **VERO** se f **è definita su un intervallo**
- Questo è **FALSO** se f **non è definita su un intervallo**

Esempio

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ (non è intervallo!)}$$

ammette come primitive tutte le funzioni della forma (con $c_1 \neq c_2$, in generale)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + c_1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x} + c_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



♣ Ritorniamo a funzioni **definite su intervalli**.

Proposizione

sia I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, e F, $\tilde{F} : I \to \mathbb{R}$ due primitive di f sull'intervallo I. Allora esiste

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad \forall\, x \in I \quad \tilde{F}(x) = F(x) + c.$$

Corollario: il teorema di struttura degli integrali indefiniti

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e supponiamo che essa ammetta una primitiva F. Allora l'integrale indefinito di f è dato da

$$\int f(x)\, dx = \{F + c \;:\; c \in \mathbb{R}\} .$$

Esempio

Una primitiva di $f(x) = x^2$ è $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Quindi $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + c$

Osservazioni:

1. il calcolo di un integrale indefinito da' come risultato un insieme di (infinite) funzioni. Per selezionare una sola fra tutte le primitive di una assegnata f, è sufficiente imporre che, in un dato punto x_0, la primitiva assuma un assegnato valore y_0.
2. vale il teorema di linearità per gli integrali indefiniti: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, per ogni $f, g : I \to \mathbb{R}$ si ha

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int f(x) \, dx + \beta \int g(x) \, dx$$

Integrali indefiniti delle funzioni elementari

$$\forall\, r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad \int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c\,,$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \sin(\alpha x)\, dx = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \cos(\alpha x)\, dx = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \frac{1}{\cos^2(\alpha x)}\, dx = \int \left(1 + \tan^2(\alpha x)\right)\, dx = \frac{1}{\alpha}\tan(\alpha x) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}\, dx = \frac{1}{\alpha}\arctan(\alpha x) + c$$

Esempio:

Calcolare la primitiva (**l'unica!**) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di

$$f(x) = x^5 + \frac{1}{x^2+4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

tale che $F(0) = 3$.

Problema: esistenza di primitive?

Il **primo teorema fondamentale del calcolo** garantisce che, se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua su I, allora f ammette (infinite) primitive su I.

Definizione

Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Chiamiamo *funzione integrale* di f la funzione $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$A(x) := \int_c^x f(t)\, dt \quad \text{per ogni } x \in [a, b],$$

con $c \in [a, b]$ fissato.

Il primo teorema fondamentale del calcolo integrale

Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$. Sia $c \in [a,b]$ e sia $A : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale

$$A(x) := \int_c^x f(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Allora A è derivabile per ogni $x \in]a,b[$, e si ha

$$A'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in]a,b[.$$

Dimostrazione: Sia $x \in (a, b)$. Calcoliamo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

dove $x + h \in (a, b)$ per h sufficientemente piccolo. Si ha

$$\begin{aligned} A(x+h) - A(x) &= \int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt \\ &= \int_c^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Per $h > 0$ il teorema della media integrale implica che esiste un $\xi_h \in [x, x+h]$ tale che

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = h\,f(\xi_h).$$

Per $h < 0$ applichiamo il teorema della media all'integrale

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = -\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt.$$

Quindi esiste un $\xi_h \in [x+h, x]$ tale che

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = -(-h)\,f(\xi_h) = h\,f(\xi_h).$$

Dunque in ogni caso si ha

$$A(x+h) - A(x) = h\,f(\xi_h),$$

e cioè

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(\xi_h).$$

Siccome $\xi_h \to x$ per $h \to 0$, per la continuità di f si ha

$$\exists\, A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x)\,. \quad \blacksquare$$

Anche in questo caso l'ipotesi di continuità su f è fondamentale: la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ \\ 1 & \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

è integrabile in quanto continua a tratti, ma **non ammette alcuna primitiva**. Cioè non esiste alcuna funzione derivabile $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tale che

$$F'(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ \\ 1 & \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Infatti si ha

$$F'_{+}(0) = 1, \qquad F'_{-}(0) = -1.$$

e quindi F non è derivabile in $x = 0$.

Corollario del Primo Teorema fondamentale del Calcolo

Le funzioni continue f su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ ammettono sempre una primitiva.

Tutte e sole le primitive di f si ottengono aggiungendo una costante arbitraria a

$$A(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

dove a è un elemento di I: quindi

processo di integrazione $\Rightarrow$ primitive di una funzione continua

Il secondo teorema fondamentale del calcolo

Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora per ogni $a, b \in I$ si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f.

Osservazione:

primitive di una funzione continua $\Rightarrow$ **calcolo di integrali**

(non si passa attraverso la definizione di integrale: somme superiori e inferiori!!)

Notazione: $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b .$$

Dimostrazione: Dal primo teorema fondamentale del calcolo segue che una primitiva di f è data da

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Sia F una qualsiasi altra primitiva di f. Siccome due primitive di f differiscono per una costante, esiste un $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = A(x) + c,$$

e quindi

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - c,$$

Scegliendo $x = a$ si ottiene

$$0 = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) - c \quad \Rightarrow \quad F(a) = c.$$

Dunque
$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$
Per $x = b$ si ha
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \qquad \blacksquare$$

Esempi:

(1) Calcolare
$$\int_1^2 \frac{x+2}{x^{5/2}}\,dx.$$

(2) Calcolare
$$\int_0^1 \left(2x^{4/3} - \frac{4}{1+3x^2} + \sin(5x)\right)\,dx$$

(3) Calcolare
$$I = \int_1^{1/2} \left(\frac{3}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{3x} + 4e^{-x}\right)\,dx.$$

Formule di integrazione

Integrazione per parti

Si applica all'integrazione di <u>prodotti di funzioni</u>

Proposizione: formula di integrazione per parti

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo in $\mathbb{R}$ e siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni <u>derivabili con derivata continua</u> (cioè f, $g \in \mathrm{C}^1(I)$).
Allora per ogni $a, b \in I$ abbiamo che

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Dimostrazione

La formula per la derivazione del prodotto implica che

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x).$$

Tutte le funzioni che compaiono nell'ultima equazione sono continue su $[a,b]$ e quindi integrabili. Dunque

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \int_a^b (f(x)\,g(x))'\,dx - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

$$= \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx,$$

dove abbiamo applicato il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo. ■

Osservazioni

- la formula vale anche per integrali indefiniti
- $$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

  riconduce il calcolo di $\boxed{\int_a^b f'g}$ al calcolo di $\boxed{\int_a^b fg'}$ (la derivata è stata "scaricata" dalla f alla g).
  L'idea è: passare dall'"integrale difficile" $\int_a^b f'g$ all'integrale "più semplice" $\int_a^b fg'$.

- Operativamente, per applicare l'integrazione per parti al calcolo di

$$\int_a^b h(x)k(x)\, dx$$

bisogna scegliere, fra h e k,

  - quale ha il ruolo di f',
  - quale ha il ruolo di g.

è <u>fondamentale</u> scegliere bene quale delle due funzioni derivare e quale integrare.

Miscellanea di integrali per parti

Prodotto di un polinomio per una funzione trigonometrica

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* polinomiale *e sia* $\alpha \neq 0$*:*

$$\int_a^b P(x) \sin(\alpha x)\ dx \quad \left(\text{oppure } \int_a^b P(x) \cos(\alpha x)\ dx\right)$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sin(\alpha x) & (\text{oppure } f' \leftrightarrow \cos(\alpha x)) \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè **integriamo la funzione trigonometrica e deriviamo il polinomio**.

Esempio

$$I = \int_0^1 x \cos(2x)\ dx$$

Può essere necessario applicare l'integrazione per parti ripetutamente,

Esempio

$$I = \int_1^2 x^3 \sin(x)\ dx$$

$$I = -\int_1^2 3x^2(-\cos(x))\,dx + \Big[x^3(-\cos(x))\Big]_1^2$$

$$= -\int_1^2 6x(\sin(x))\,dx + \Big[3x^2(\sin(x))\Big]_1^2 + \Big[x^3(-\cos(x))\Big]_1^2$$

$$= -\int_1^2 6\cos(x)\,dx + \Big[6x\cos(x)\Big]_1^2 + \Big[3x^2(\sin(x))\Big]_1^2 + \Big[x^3(-\cos(x))\Big]_1^2$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* *polinomiale* *e sia* $\alpha \neq 0$.

$$\int P(x)e^{\alpha x}\, dx.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow e^{\alpha x}, \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè **integriamo la funzione esponenziale e deriviamo il polinomio**.

Esempio

$$I = \int_0^2 xe^{2x} \ dx$$

$$I = -\int_0^2 1\frac{e^{2x}}{2}\, dx + \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^2$$

$$= -\left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^2 + \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^2$$

$$= \ldots\ldots$$

Prodotto di un polinomio per una funzione iperbolica.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* *<u>polinomiale</u>* *e sia* $\alpha \neq 0$*:*

$$\int_a^b P(x) \sinh(\alpha x)\ dx \quad \left(\text{oppure } \int_a^b P(x) \cosh(\alpha x)\ dx\right)$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sinh(\alpha x) & (\text{oppure } f' \leftrightarrow \cosh(\alpha x)) \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè **integriamo la funzione iperbolica e deriviamo il polinomio***.*

Prodotto di un polinomio per una funzione logaritmica.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* <u>*polinomiale*</u> *e sia* $\alpha \neq 0$*. Siano* $\boxed{0 < a < b}$*:*

$$\int_a^b P(x) \ln(\alpha x) \, dx.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \ln(\alpha x), \end{cases}$$

cioè **integriamo il polinomio e deriviamo la funzione logaritmica**.

Esempio

$$I = \int_1^3 x \ln(2x)\ dx$$

$$I = -\int_1^3 \quad \underbrace{\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}}_{=\frac{x}{2}} \quad dx + \left[\frac{x^2}{2}\ln(2x)\right]_1^3$$

$$= -\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2}\ln(2x)\right]_1^3$$

$$= \dots\dots\dots$$

Esempio

$$I = \int \ln(x)\ dx$$

$$I = \int 1 \cdot \ln(x)\ dx$$

$$= -\int x \frac{1}{x}\, dx + x \ln(x)$$

$$= \ln(x)x - x + c$$

Prodotto di un polinomio per l'arcotangente.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* <u>*polinomiale*</u> *e sia* $\alpha \neq 0$.

$$\int_a^b P(x) \arctan(\alpha x) \; dx.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \arctan(\alpha x), \end{cases}$$

cioè **integriamo il polinomio e deriviamo la funzione arcotangente**.

Esempio

$$I = \int_0^1 x \arctan(x)\ dx$$

$$I = -\int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\,dx + \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{\frac{x^2+1-1}{1+x^2}}_{=1-\frac{1}{1+x^2}}\,dx + \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x - \arctan(x)\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right]_0^1$$

Integrazione per sostituzione

Esempio

Come integrare

$$\int_0^1 \sin^2(t) \arctan(\sin(t)) \cos(t)\, dt??$$

Intuitivamente: ponendo

$$x = \sin(t), \quad \text{cioè} \quad t = \arcsin(x),$$

ottengo il termine $\boxed{x^2 \arctan(x)}$, che so come trattare (integrando per parti).

- Come diventa il termine $\cos(t)\, dt$?
- come diventano gli estremi di integrazione?

La formula di integrazione per sostituzione ci dice come si trasforma l'integrale dopo il cambiamento di variabile

$$x = \varphi(t) \iff t = \varphi^{-1}(x)$$

tramite una φ invertibile.

Formula di integrazione per sostituzione

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\boxed{x = \varphi(t)}$ un cambiamento di variabile tale che

$$\varphi : I \to \mathbb{R} \text{ è invertibile e derivabile con derivata continua: } \varphi \in \mathrm{C}^1(I).$$

Allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.}$$

- Vi è anche una versione per gli integrali indefiniti.

Dimostrazione: Sia F una primitiva di f. Quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Per l'ipotesi la funzione $F(\varphi(t))$ è derivabile e vale

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (F(\varphi(t)))'\,dt \\ &= F(\varphi(\varphi^{-1}(b))) - F(\varphi(\varphi^{-1}(a))) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

♣ **Osservazione:**

- integrazione per parti $\sim$ integrazione di un prodotto di funzioni $\rightsquigarrow$ la dimostrazione della formula di integ. per <u>parti</u> è basata su formula per la derivata del <u>prodotto</u> di funzioni
- integrazione per sostituzione $\sim$ integrazione tramite cambiamento di variabile $\rightsquigarrow$ la dimostrazione della formula di integ. per <u>sostituzione</u> è basata su formula per la derivata della <u>composizione</u> di funzioni

Struttura di

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

$$\begin{array}{lcl} f(x) & \rightsquigarrow & f(\varphi(t)) \\ dx & \rightsquigarrow & \varphi'(t)\,dt \\ \int_a^b & \rightsquigarrow & \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \end{array}$$

Esempio iniziale

$$I = \int_0^1 \sin^2(t) \arctan(\sin(t)) \cos(t)\, dt$$

Pongo $\boxed{x = \sin(t)}$, quindi

$$\begin{cases} dx = (\sin(t))'\, dt = \cos(t)\, dt, \\ 0 \leq t \leq 1 \ \rightarrow 0 = \sin(0) \leq x = \sin(t) \leq \sin(1) \end{cases}$$

Quindi

$$I = \int_0^{\sin(1)} x^2 \arctan(x)\, dx$$

che poi integro per parti...

Strategia per integrare funzioni che contengono termini con radicali: effettuare la sostituzione in modo da *eliminare* il radicale.

Esempio 1

$$I = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx.$$

Pongo $\boxed{t = \sqrt{x+1}}$ da cui

$$\begin{cases} dt = (\sqrt{x+1})'\, dx = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\, dx, \\ x \in [0,2] \;\Rightarrow\; t \in [1, \sqrt{3}], \\ x = t^2 - 1 \end{cases}$$

Strategia: **evidenzio** *dt* e poi sostituisco

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 2x \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\, dx \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} 2(t^2-1)\, dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - 2t\right]_1^{\sqrt{3}} = \dots \end{aligned}$$

Esempio 2

$$I = \int_0^1 s^3 e^{s^2}\, ds.$$

Pongo $\boxed{t = s^2}$, da cui

$$\begin{cases} dt = 2s\, ds \\ s \in [0,1] \ \Rightarrow \ t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{2} s^2 e^{s^2} 2s\, ds \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} t e^t\, dt = \ldots \end{aligned}$$