Integrazione per sostituzione

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi Matematica B

Integrazione per sostituzione

Esempio

Come integrare

$$\int_0^1 \sin^2(t)\arctan(\sin(t))\cos(t)\,dt??$$

Intuitivamente: ponendo

$$x = \sin(t), \quad \text{cioè} \quad t = \arcsin(x),$$

ottengo il termine $\boxed{x^2 \arctan(x)}$, che so come trattare (integrando per parti).

- Come diventa il termine $\cos(t)\,dt$?
- come diventano gli estremi di integrazione?

La formula di integrazione per sostituzione ci dice come si trasforma l'integrale dopo il cambiamento di variabile

$$x = \varphi(t) \;\Leftrightarrow\; t = \varphi^{-1}(x)$$

tramite una φ invertibile.

Formula di integrazione per sostituzione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\boxed{x = \varphi(t)}$ un cambiamento di variabile tale che

$$\varphi : I \to \mathbb{R} \text{ è invertibile e derivabile con } \varphi' \text{ continua: } \varphi \in \mathrm{C}^1(I).$$

Allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.}$$

- Vi è anche una versione per gli integrali indefiniti.

Dimostrazione: Sia F una primitiva di f (cioè, $F' = f$). Quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Per l'ipotesi la funzione $F(\varphi(t))$ è derivabile e vale

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (F(\varphi(t)))'\,dt \\ &= F(\varphi(\varphi^{-1}(b))) - F(\varphi(\varphi^{-1}(a))) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

♣ **Osservazione:**

- integrazione per parti $\sim$ integrazione di un prodotto di funzioni $\rightsquigarrow$ la dimostrazione della formula di integ. per <u>parti</u> è basata su formula per la derivata del <u>prodotto</u> di funzioni
- integrazione per sostituzione $\sim$ integrazione tramite cambiamento di variabile $\rightsquigarrow$ la dimostrazione della formula di integ. per <u>sostituzione</u> è basata su formula per la derivata della <u>composizione</u> di funzioni

Struttura di

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

$$f(x) \quad \rightsquigarrow \quad f(\varphi(t))$$

$$dx \quad \rightsquigarrow \quad \varphi'(t)\,dt$$

$$\int_a^b \quad \rightsquigarrow \quad \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}$$

Esempio iniziale

$$I = \int_0^1 \sin^2(t)\arctan(\sin(t))\cos(t)\,dt$$

Strategia per integrare funzioni che contengono termini con radicali: effettuare la sostituzione in modo da *eliminare* il radicale.

Esempio 1

$$I = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx.$$

Esempio 2

$$I = \int_0^1 s^3 e^{s^2}\, ds.$$