# Equazioni differenziali

Riccarda Rossi

Università di Brescia

**Analisi B**

# Introduzione ed esempi

Sono equazioni in cui:

- l'incognita è una <u>funzione</u> $y : I \to \mathbb{R}$
- si stabilisce un un legame tra
  - $y$ funzione incognita
  - le derivate $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ di $y$

Useremo l'acronimo:

$$\boxed{\text{E.D.O.} = \text{Equazione Differenziale Ordinaria.}}$$

## Esempio 1

$$y'(x) = x + \arctan y(x)$$

- È una E.D.O. del primo ordine:

- Si usa anche la scrittura $y' = x + \arctan y$.

## Esempio 2

$$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = \sin t.$$

- È una E.D.O. del secondo ordine:
- Si scrive anche $z'' + 2z' + z = \sin t$.

# Esempio 3

Il problema della primitiva: *sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto; data $f : I \to \mathbb{R}$, trovare $y : I \to \mathbb{R}$, derivabile, tale che*

$$y'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in I\,. \tag{$\mathrm{EDO}_1$}$$

*Chiamiamo primitiva di $f$ su $I$ ogni funzione $y$ derivabile, verificante la $(\mathrm{EDO}_1)$.*

**Osservazioni:**

- $(\mathrm{EDO}_1)$ è una (particolare) eq. diff. ord., di ordine 1, che si risolve tramite integrazione
- teor. di struttura dell'integrale indefinito:

$$\int f(x)dx = y(x) + c, \text{ con } \begin{array}{ll} y & \text{particolare soluz. di } (\mathrm{EDO}_1) \\ c & \text{costante arbitraria in } \mathbb{R} \end{array}$$

cioè la E.D.O. $(\mathrm{EDO}_1)$ ammette **infinite soluzioni**, parametrizzate da una costante $c \in \mathbb{R}$.

- Per determinare una e una sola soluzione a $(\mathrm{EDO}_1)$, si deve assegnare un'ulteriore condizione.
  Per esempio, una **condizione di Cauchy**, cioè

$$y(x_0) = y_0, \quad \text{con } x_0 \in I, \quad y_0 \in \mathbb{R}.$$

- Allora il **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y'(x) = f(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

  ammette **una e una sola soluzione**.

# Generica E.D.O. del prim'ordine (in forma normale)

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

- il suo $\boxed{\text{integrale generale}}$ = insieme di tutte le soluzioni dipende in generale da **una costante arbitraria**;
- il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

sotto opportune condizioni su $f$ ammette un'unica soluzione (definita in un intervallo contenente $x_0$).

Per una E.D.O. del **secondo ordine (in forma normale)**

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \qquad (\mathrm{EDO}_2)$$

- l' $\boxed{\text{integrale generale}}$ = <u>insieme di tutte le soluzioni</u> della E.D.O. $(\mathrm{EDO}_2)$ dipende in generale da **due costanti arbitrarie**;
- per determinare <u>una e una sola</u> soluzione di $(\mathrm{EDO}_2)$ si deve imporre che la soluzione soddisfi ulteriormente <u>due condizioni</u>;
- il **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

sotto <u>opportune condizioni su $f$</u>, ammette una e una sola soluzione (definita in un intervallo contenente $x_0$).

**Generica E.D.O. di ordine $n$:**

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad (\mathrm{EDO}_n)$$

che **in forma normale si scrive**

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)). \qquad (\mathrm{EDO}_n)$$

- la **derivata di ordine massimo** della funz. incognita $y$ è la derivata $n$-esima $y^{(n)}$;
- la E.D.O. stabilisce un legame fra $y$ e le sue derivate $y', \dots, y^{(n)}$
- l'integrale generale dipenderà da $n$ costanti arbitrarie $\rightsquigarrow$ necessarie $n$ condizioni per determinare una e una sola soluzione

- Problema di Cauchy per $(\mathrm{EDO}_n)$ (**in forma normale**):

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

  sotto opportune condizioni su $f$, esso ammette una e una sola soluzione (definita in un intervallo contenente $x_0$).

Noi ci occuperemo di

- equazioni del primo ordine a coefficienti continui (eq. a variabili separabili ed eq. lineari)
- equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.

Quindi d'ora in poi considereremo solo i casi $\mathbf{n} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{n} = \mathbf{2}$.

# Un esempio dalla fisica

Se un punto $P$ di massa $m$ si muove lungo una retta soggetto ad una forza $F$, allora la seconda legge di Newton afferma che

$$m\, y''(t) = F(t, y(t), y'(t))$$

dove $y(t)$ indica la posizione di $P$ in tempo $t$, $y'(t)$ è la sua velocità e $y''(t)$ è la sua accelerazione.

## Esempio

Se la forza $F$ è dovuta alla gravità, allora si ha

$$m\, y''(t) = -mg,$$

**(E.D.O. lineare di ordine 2 a coeff. cost.)**, dove $g$ è l'accelerazione di gravità. La soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy associato a questa E.D.O. è

$$y(t) = -\frac{g}{2}\, t^2 + y'(0)\, t + y(0)$$

In questo caso la funzione $y$ descrive la caduta libera.

# Un esempio dalla biologia

Il modello di Malthus (1798) descrive l'evoluzione temporale di una popolazione isolata in cui gli unici fattori di evoluzione sono la fertilità e la mortalità. Siano:

- $N(t) \geq 0 \rightsquigarrow$ numero di individui presenti al tempo $t$,
- $\lambda \rightsquigarrow$ tasso di natalità per unità di tempo
- $\mu \rightsquigarrow$ tasso di di mortalità per unità di tempo

($\lambda$ e $\mu$ costanti in $t$). Allora la variazione di individui nel tempo $h$ è

$$N(t+h) - N(t) = \lambda N(t)h - \mu N(t)h.$$

Al limite per $h \to 0$ si ha

$$N'(t) = (\lambda - \mu)N(t)$$

che è una **eq. a variabili separabili**.

# Equazioni a variabili separabili

Sono E.D.O. del tipo

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

**Osservazione:** è una E.D.O. del prim'ordine $y'(x) = f(x, y(x))$, in cui la funzione $f$ è della forma

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

cioè prodotto di una $\underline{\text{funz. della sola } x}$ e di una $\underline{\text{funz. della sola } y}$ (le variabili $x$ e $y$ sono $\underline{\text{separate}}$).

**Es.** 1

$$y'(x) = x \ln(x)$$

**Es.** 2

$$y'(x) = x^2 \sin(y(x))$$

D'ora in poi, cambio di notazione: $h \rightsquigarrow f$.

## Ipotesi

$I$, $J$ intervalli aperti,

$$g : J \to \mathbb{R} \text{ continua su } J, \quad f : I \to \mathbb{R} \text{ continua su } I,$$

e consideriamo il $\boxed{\text{problema di Cauchy}}$

$$\begin{cases} y' = f(y)g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{con } x_0 \in J \text{ e } y_0 \in I.$$

# Metodo della separazione delle variabili

è un procedimento di risoluzione (formale, ma può essere rigorosamente giustificato) per

$$\begin{cases} y' = f(y)g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(1) usiamo la notazione $y' = dy/dx$, sicché la E.D.O. si riscrive come

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x).$$

(2) Questo suggerisce di "separare le variabili", cioè
- divido **(formalmente!)** entrambi i membri per $f(y)$
- moltiplico **(MOLTO formalmente!)** entrambi i membri per $dx$

(3) Quindi arriviamo a

$$\frac{1}{f(y)}\, dy = g(x)\, dx.$$

(4) Integro entrambi i membri, quindi

$$\int \frac{1}{f(z)}\,dz = \int g(s)\,ds, \tag{1}$$

che fornisce l'**integrale generale** della E.D.O. $y' = f(y)g(x)$. Notare che (1) dipende da una costante arbitraria.

(5) Impongo la condizione di Cauchy $y(x_0) = y_0$, ottenendo la **formula risolutiva** del problema di Cauchy

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)}\,dz = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds.$$

(6) Quindi il metodo della separazione delle variabili comporta *due integrazioni nelle variabili* $y$ *e* $x$ *separatamente*.

# La formula risolutiva

$$\boxed{\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)}\,dz = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds} \qquad (2)$$

## Osservazioni

(1) Supponiamo che $\ell$ sia una <u>primitiva</u> di $\frac{1}{f}$. Allora, per il secondo teor. fond. del calcolo si ha

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)}\,dz = [\ell]_{y_0}^{y(x)} = \ell(y(x)) - \ell(y_0).$$

Allora (2) diventa $\ell(y(x)) - \ell(y_0) = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$, da cui

$$\ell(y(x)) = \ell(y_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$$

che da' la funzione $y = y(x)$ **in forma implicita** (si deve invertire $\ell$..)

(2) Cosa succede se $\boxed{f(y_0) = 0}$? Allora la funz. $\frac{1}{f}$ ha un asintoto verticale in $y_0$, quindi

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)}\, dz \quad \text{non ha senso come integrale di Riemann...}$$

**MA:** Se $\boxed{f(y_0) = 0}$, allora la funzione <u>costante</u>

$$y(x) \equiv y_0$$

è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x))g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

# Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui

Sono E.D.O. della forma

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad \text{per ogni } x \in I$$

con

$$I \text{ intervallo}, \ a, b : I \to \mathbb{R} \text{ funzioni continue su } I$$

# Formula risolutiva

Il problema di Cauchy associato

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) & \forall\, x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{3}$$

Sia $A : I \to \mathbb{R}$ tale che $\boxed{A'(x) = a(x) \ \ \forall\, x \in I}$. Moltiplichiamo entrambi i membri della E.D.O. per la funz. $x \in I \mapsto e^{A(x)}$,

Per *risolvere il problema di Cauchy*,

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall\, x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{4}$$

imponiamo la condizione di Cauchy $\boxed{y(x_0) = y_0}$, da cui

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[ e^{A(x_0)} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)} b(s)\, ds \right]. \tag{5}$$

(1) **Osserviamo che** $A$ è, fin qui, *una delle infinite* primitive di $a$, che dipendono da una costante arbitraria $c$. Si verifica facilmente che, in (5), la soluz. $y$ **non dipende da** $c$.

(2) Per "comodità", scegliamo la primitiva $A$ di $a$ tale che $A(x_0) = 0$, cioè

$$\boxed{A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds}.$$

(3) Allora otteniamo la formula risolutiva

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)} \left[ y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)} b(s)\, ds \right]} \text{ con } A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds$$

che si riscrive come

$$y(x) = \exp\left( \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds \right) \times \left[ y_0 + \int_{x_0}^{x} \exp\left( \int_{x_0}^{s} a(r)\, dr \right) b(s)\, ds \right].$$

# Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Sono E.D.O. della forma

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I, \tag{6}$$

con $\boxed{a, b \in \mathbb{R}}$ e $\boxed{f : I \to \mathbb{R} \text{ funzione continua}}$ (*termine forzante*).

**Equazione omogenea associata a (6)**

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad \forall\, x \in I$$

Per confronto, (6) viene anche detta *equazione completa*.

## Problema di Cauchy associato

$$\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \ \forall \, x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{7}$$

dove $x_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

## FONDAMENTALE: proprietà (di linearità) dell'equazione

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni di

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I,$$

allora

$$\boxed{v(x) = y_1(x) - y_2(x) \text{ risolve}}$$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad \forall\, x \in I \qquad (\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}})$$

Infatti,

♣ **Quindi:** date <u>due qualunque</u> soluzioni $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ di

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall x \in I,$$

si ha che

$$y_1(x) = v(x) + y_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ con } v \text{ soluz. dell'omogenea}$$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I, \qquad (\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad \forall\, x \in I \qquad (\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}})$$

## Teorema di struttura per l'integrale generale di $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$

integrale generale di $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$

$=$ integrale generale di $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}})$ $+$ soluz. particolare di $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$

cioè, la generica soluzione $y$ di $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$ è data da

$$y(x) = v(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I, \ \text{con} \quad \begin{array}{ll} v & \text{generica sol. di } (\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}}), \\ y_p & \text{sol. particolare di } (\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}}). \end{array}$$

**Osservazione importante:** $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$, $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}})$ sono equazioni del second'ordine: il loro integrale generale sarà parametrizzato da **due costanti arbitrarie**.

# Strategia per risolvere

$$
\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \ \forall\, x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{8}
$$

1. Determinare l'integrale generale (cioè **tutte le soluzioni**) dell'equazione omogenea associata.
2. Determinare **una soluzione particolare** $y_p$ dell'equazione completa; in questo modo si otterrà l'integrale generale dell'equazione completa, dipendente da **due costanti arbitrarie**.
3. Imponendo le condizioni di Cauchy

$$
\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}
$$

si determinano anche le costanti corrispondenti all'**unica soluzione** di Cauchy (8).

# Risoluzione dell'equazione omogenea

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

Si risolve non tramite integrazione, ma con un processo risolutivo <u>algebrico</u>, considerando l'associata **equazione caratteristica**

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

$\rightsquigarrow$ <u>tre casi:</u>

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

**[Caso 1:]** **esistono due soluzioni reali e distinte** $\lambda_1$ e $\lambda_2$ (caso $a^2 - 4b > 0$),
allora l'integrale generale di $y'' + ay' + by = 0$ è

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ arbitrarie}}$$

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

**[Caso 2:]** **esiste ammette una sola soluzione reale $\lambda$ di molteplicità due** (caso $a^2 - 4b = 0$), allora l'integrale generale di $y'' + ay' + by = 0$ è

$$\boxed{(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ arbitrarie}}$$

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

**[Caso 3:]** **L'eq. ammette due soluzioni complesse coniugate** $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (caso $a^2 - 4b < 0$), allora l'integrale generale di $y'' + ay' + by = 0$

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right) \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ arbitrarie}}$$

# Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: soluzioni particolari dell'equazione completa

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I, \qquad (\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$$

Ci sono due metodi per determinare una soluzione particolare:

1. il metodo della variazione delle costanti
2. il metodo "ad hoc"

Esamineremo il problema nel caso in cui il termine forzante $f$ è del tipo

$$\begin{cases} f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \text{ o} \\ f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $R_k$ polinomio di grado $k$

**Esempi:**

$$f(x) = x^2 e^x \quad \text{con } R_k(x) =$$

$$f(x) = x \quad \text{con } R_k(x) =$$

$$f(x) = \sin 2x \quad \text{con } R_k(x) =$$

$$f(x) = x^3 e^{2x} \cos 3x \quad \text{con } R_k(x) =$$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I, \qquad (\mathrm{EQ_{comp}})$$

con $\boxed{f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)}$ o $\boxed{f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)}$

♣ **Tecnica di risoluzione:** Considero il numero complesso

$$\tilde{z} = \alpha + i\beta$$

Due alternative:

(1) $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ $\boxed{\text{non è}}$ soluzione dell'equazione

$$z^2 + az + b = 0$$

associata all'eq. omogenea $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$: allora esiste una soluzione particolare $y_p$

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right],$$

con $Q_k$ e $S_k$ polinomi di grado $k$.
Determino $Q_k$ e $S_k$ **imponendo che $y_p$ sia effettivamente una soluzione**.

(2) $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ $\boxed{\text{è}}$ soluzione dell'equazione

$$z^2 + az + b = 0$$

associata all'eq. omogenea $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$, con molteplicità $h$, allora esiste una soluzione particolare $y_p$

$$y_p(x) = x^h e^{\alpha x} \left[ Q_k(x) \cos(\beta x) + S_k(x) \sin(\beta x) \right]$$

con $Q_k$ e $S_k$ polinomi di grado $k$, che si determinano **imponendo che $y_p$ sia effettivamente una soluzione di** $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$.