

Esercizi di riepilogo tratti dai temi d'esame

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi B

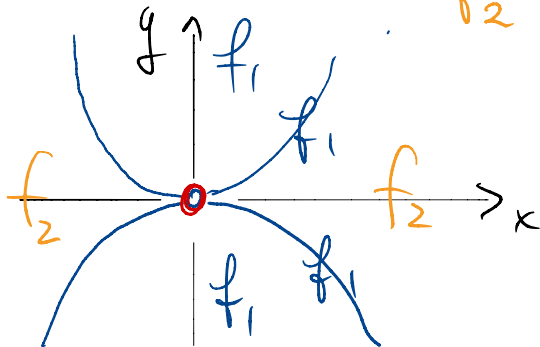
04.09.2017

Studiare continuità, derivabilità parziale e direzionale, e differenziabilità di

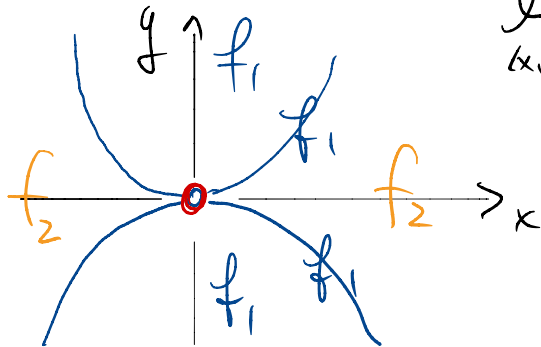
$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\exp(x^3) - 1}{x^2 + y^2} & \text{se } |y| \geq x^2, (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{\arctan(x^2) + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } |y| < x^2, \end{cases}$$

Handwritten notes: $y \geq x^2$ or $y \leq -x^2$ (in yellow); f_1 (in blue) for the first case; f_2 (in orange) for the second case.

con $f(0, 0) = 0$.



CONT. in $(0,0)$: vero $\Leftrightarrow$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

PER VERIFICARE QS,
è suffic.

verificare che

$$\begin{aligned} 1) \quad 0 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x,y) = L_1 \\ 2) \quad 0 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x,y) = L_2 \end{aligned}$$

DEVONO
VALERE
ENTRAMBE !!

$$L_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3} - 1}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0 \quad (\text{ES.})$$

$$L_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\arctan(x^2) + zy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

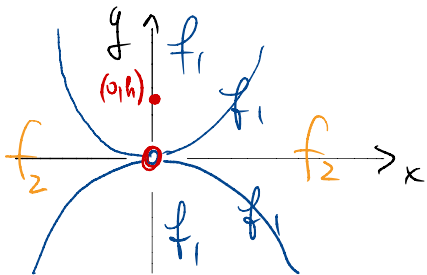
Taylor $\uparrow$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + zy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (\text{ES.})$$

coord. polari
(maggiore)

OK CONT. in (0,0)!

Derivate PARZIALI



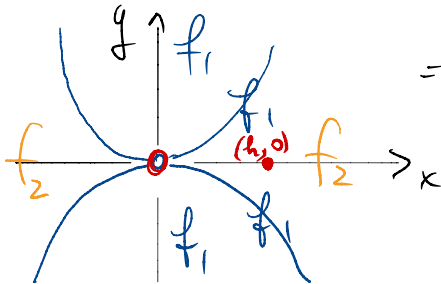
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(0,h) - f(0,0)}{h} = 0\end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^0 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

(non è una
forma indet.)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}$$



$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(h,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan(h^2)}{\sqrt{h^2} \cdot h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan(h^2)}{|h| \cdot h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{|h| \cdot h} \quad \text{[crossed out]}$$

f non è diff. in $(0,0)$.
(perché $\nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)!!$)

Suggerimento per le derivate direz:

- 1) riguardare gli ESERC. N° 51
 - 2) tenete conto che, vicino all'
 $(0,0)$ le rette hanno sopra $y=x^2$
o sotto $y=-x^2$
- ↳ q.s. aiuta a decidere quale

espressione attribuire a f !!

27.03.2018

Studiare continuità, derivabilità parziale e direzionale, e differenziabilità di

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2}\right) - \cos(x+y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Continuità:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{-\frac{(x-y)^2}{2} + \frac{1}{2}(x+y)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

↑ uso gli sviluppi di Taylor per $\exp$ e $\cos$: per $t \rightarrow 0$
 $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$
 $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

(N.B.: è stato sufficiente considerare gli sviluppi di Taylor al 1° ordine).

Esistenza delle derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - \overbrace{f(0,0)}^0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{e^{-\frac{h^2}{2}} - \cos(h)}{\sqrt{h^2}} \right]$$

$$\leftarrow = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1 - \frac{h^2}{2} + \left(\frac{h^2}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - 1 + \frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{24}}{|h|} \right]$$

us
lo sviluppo
di Taylor al
2° ordine

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4}{12}}{|h| \cdot h} = 0$$

È facile immediatam che $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0).$$

Differenziabilità

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2}\right) - \cos(x+y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{-(x-y)^2}{2} + \frac{1}{2}(x+y)^2}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} \rightarrow \text{e q.s. limite } \nexists$$

$\Rightarrow f$ non è diff. in $(0,0) \dots$

04.09.2017

Si consideri

$$f(x, y) = (y^2 - x)^2 \arctan(x^2 - y).$$

Classificare i punti stazionari sulla parabola $x = y^2$.

- ES: verificare che i punti di
- $x = y^2$ sono stazionari per f
 - la loro classificazione tramite test matrice Hessiana è da evitare.

Allora: fisso un generico punto
 (x_0, y_0) su $x = y^2$

$$\Rightarrow f(x, y) = (y^2 - x)^2 \text{ anzichè } (x^2 - y)$$

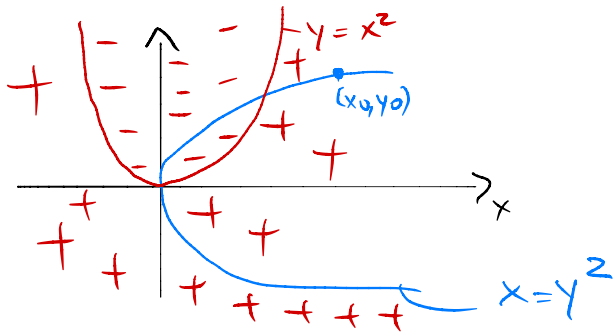
$$f(x_0, y_0) = 0$$

$\hookrightarrow x_0 = y_0^2$

Per verificare se (x_0, y_0) è di MAX/MIN/sella
studio il segno di

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y)$$

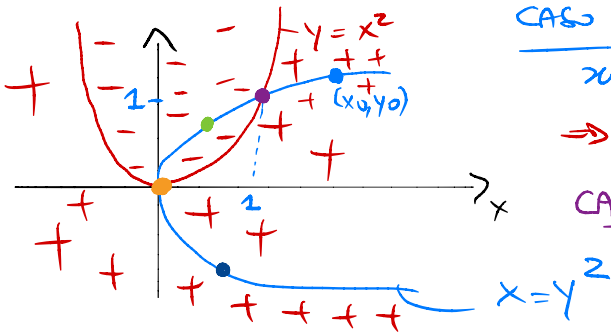
nell'intorno di (x_0, y_0) !



$$f(x, y) = \underbrace{(-x + y^2)^2}_{\geq 0} \text{ and } \text{ar} \bar{\text{u}} \text{am}(x^2 - y) \geq 0$$

$$\text{ar} \bar{\text{u}} \text{am}(x^2 - y) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y \leq x^2$$



CASO 1 :

$$x_0 > 1, y_0 > 1$$

$\Rightarrow (x_0, y_0)$ MIN. REL.

CASO 2 : $(1, 1) = (x_0, y_0)$

SELLA

CASO 3 : $0 < x_0 < 1, y_0 > 0 : (x_0, y_0)$ MASS. REL.

CASO 4 : $(x_0, y_0) = (0, 0)$ SELLA

CASO 5 : $x_0 > 0, y_0 < 0 : (x_0, y_0)$ MIN. REL.

Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definito da

$$\vec{F}(x, y) = (e^x(\cos x - \sin x) + e^x \sin y + \cos y) \vec{i} \\ + (e^x \cos y - x \sin y + y) \vec{j};$$

delle seguenti affermazioni

- (a) $\vec{F}$ è conservativo, (b) $\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 2$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (c) $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\Gamma = 1$ essendo Γ la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $(F + 1)$, percorsa una volta in senso antiorario (d) Il campo scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $\varphi(x, y) = e^x \cos x + e^x \sin y + x \cos y + \frac{1}{2}y^2 + (F + 1)$ è un potenziale per $\vec{F}$ (e) $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\Gamma = \frac{\pi^2}{2}$ dove Γ è il segmento congiungente $(0, 0)$ e $(0, \pi)$
- quelle corrette sono

Parto da (d):

si verifica che

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y) \end{cases} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow \varphi$ è un potenziale per $\vec{F} \Rightarrow (d)$ VERA

Quindi $\vec{F}$ è conserv $\Rightarrow (a)$ vera

Quindi $\vec{F}$ è irrotaz $\Rightarrow$ vale ugual.

der. in croce $\Rightarrow$ (b) falsa

(c) è falsa x' la circuitaz. di un
campo conserva lungo una qualsiasi
curva chiusa $\vec{E}$ nulla.

(e): Coledo. φ fra i 2 estremi

$$\varphi(0, \pi) - \varphi(0, 0) = \frac{\pi^2}{2} \quad \text{ok.}$$

(e) vera

L'integrale

$$\iint_T \frac{y}{(x-2)^2 + y^2} dx dy$$

dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq (x-2)^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0\}$.

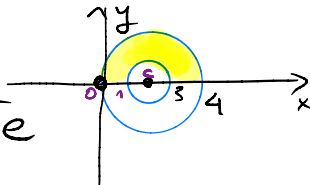
Ipotesi: T è semicorona circolare

con $C = (2, 0)$.

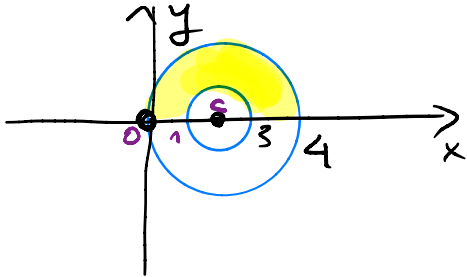
↓ coord. polari traslate

$$x-2 = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta).$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = r \cos(\theta) + 2 \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$



$$1 \leq r \leq 2$$

perché 1 e 2 sono i raggi della
corona circolare.

$$y \leq 0 \Rightarrow \theta \in [\pi, 2\pi]$$

e quindi l'integrale diventa

$$I = \iint_{[1,2] \times [\pi, 2\pi]} \frac{r \sin(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)} r dr d\theta$$

U

