

# Spazi $\mathbb{R}^n$ : concetti di base

Riccarda Rossi

Università di Brescia

**Analisi Matematica B**











■ Elementi di  $\mathbb{R}^n$ :  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x_j \in \mathbb{R}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$

■  $\mathbb{R}^n$  è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare: dati  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  si definisce la somma

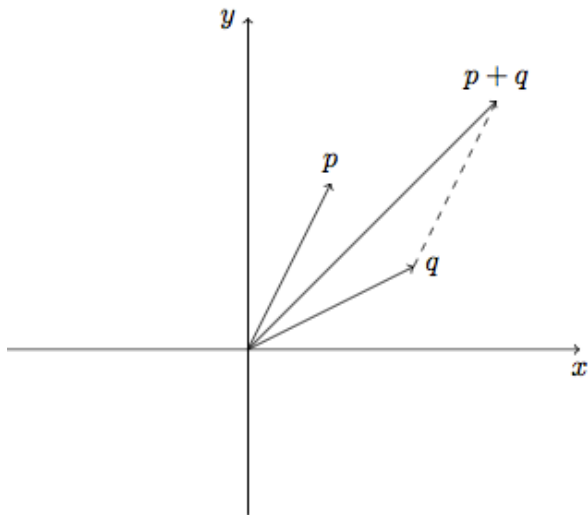
$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad (x + y) \in \mathbb{R}^n$$

e il prodotto per uno scalare  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \quad \lambda x \in \mathbb{R}^n.$$

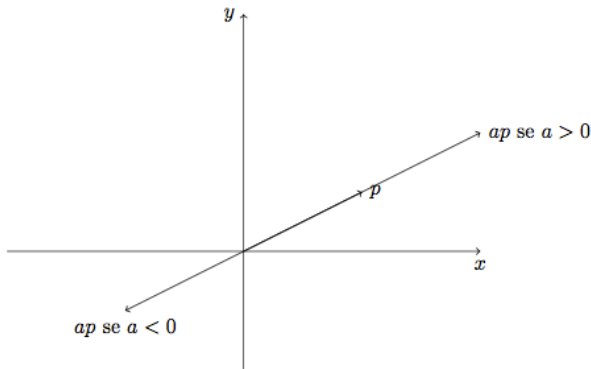
# Interpretazione geometrica in $\mathbb{R}^2$

Dati  $p, q \in \mathbb{R}^2$   
 $p + q$  è vettore della  
diagonale del  
parallelogramma





# Interpretazione geometrica in $\mathbb{R}^2$



Dati  $p \in \mathbb{R}^2$  e  $a \in \mathbb{R}$

$ap \rightsquigarrow$  dilatazione/contrazione di  $p$

## Definizione (**Prodotto scalare**)

Dati  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  chiamiamo **prodotto scalare** di  $x$  e  $y$  il numero

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

## Definizione (**Norma**)

Dato  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  chiamiamo **norma** di  $x$  la quantità

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

## Definizione (**Distanza euclidea**)

Dati  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  chiamiamo **la distanza euclidea** tra  $x$  e  $y$  la quantità

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Rileggiamo queste definizioni in  $\mathbb{R}^n$ .

## Lemma (Disuguaglianza di Schwarz)

Per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$  vale

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|.$$

**Dimostrazione:**



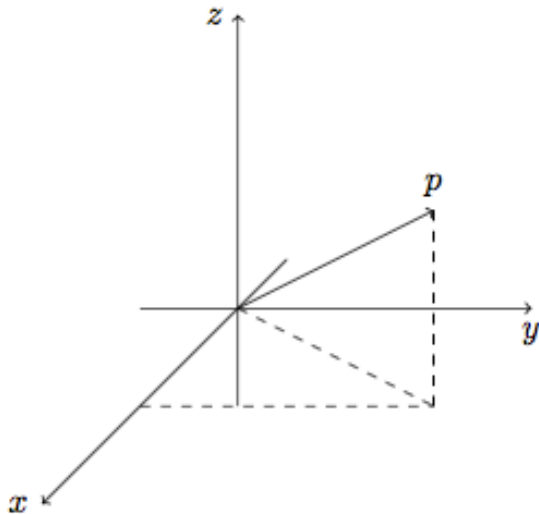








- Nel caso  $n = 2, 3$  è possibile interpretare la norma di  $x$  come la lunghezza del vettore determinato da  $x$ .



## Lemma (Proprietà della norma)

Per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  valgono le seguenti affermazioni:

- 1  $\|x\| \geq 0$  e  $\|x\| = 0$  se e solo se  $x = 0$ .
- 2  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .
- 3 *Disuguaglianza triangolare:*  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Dimostrazione:** Le proprietà 1 e 2 seguono facilmente dalla definizione di norma (esercizio a casa). Per dimostrare la disuguaglianza triangolare, usiamo la disuguaglianza di Schwarz e notiamo che







■ In  $\mathbb{R}^2$  la disuguaglianza di Schwarz (e quindi anche la disuguaglianza triangolare) è immediata conseguenza della formula

$$x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos \varphi$$

dove  $\varphi$  indica l'angolo fra i due vettori  $x$  e  $y$ . Si nota che  $x \cdot y = 0$  se e solo se i due vettori sono ortogonali.

## Definizione (**Applicazioni lineari**)

Un'applicazione  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  si dice **lineare** se per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  si ha

$$L(ax + by) = aL(x) + bL(y).$$

■ Ad ogni applicazione lineare si può associare una matrice  $A = (a_{ij})$  con  $m$  righe e  $n$  colonne tale che se

$$L(x) = y$$

con  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ , allora

$$y_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n, \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}.$$









## Esempio

$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  data da

$$L(x, y) = (y, 2x + y, x - 3y)$$



## Definizione (Norma delle applicazioni lineari)

Sia  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  un'applicazione lineare. Chiamiamo norma di  $L$  la quantità

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}$$

Quindi per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  si ha

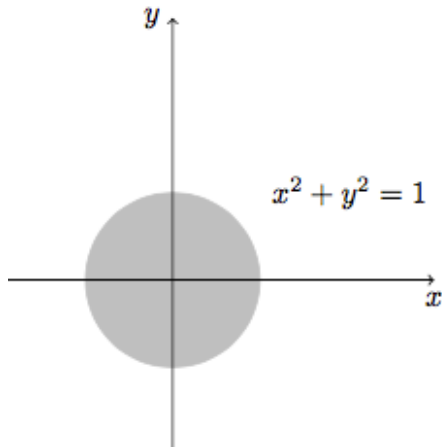
$$\|L(x)\| \leq \|L\| \|x\|.$$

# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

## Definizione (Palla di centro $x$ e raggio $\varepsilon$ )

Dati  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\varepsilon > 0$  si dice palla di centro  $x$  e a raggio  $\varepsilon$  l'insieme

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = \|x - y\| < \varepsilon\}$$



## Definizione (Intorno di un punto)

Siano  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $U$  è intorno di  $x$  se esiste  $\varepsilon > 0$  tale che

$$B_\varepsilon(x) \subseteq U.$$

## Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Siano  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ . Analogamente come nel caso  $n = 1$  si definiscono i seguenti concetti.

### Definizione

① Diciamo che  $x$  è **interno** ad  $E$  se esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $B_\varepsilon(x) \subseteq E$ .

② Diciamo che  $x$  è **di accumulazione** per  $E$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha

$$B_\varepsilon(x) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$



# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

## Definizione

- 1 Diciamo che  $x$  è **punto isolato** di  $E$  se esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $B_\varepsilon(x) \cap E = \{x\}$ .
- 2 Diciamo che  $x$  è **aderente** ad  $E$  se  $x$  è un punto di accumulazione per  $E$  oppure se  $x$  è un punto isolato di  $E$ .

■ Un punto di accumulazione per  $E$  non deve necessariamente appartenere ad  $E$ !

**Esempio:** Sia  $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\} \cup \{(2, 0)\}$ .

■ ogni  $x \in \mathbb{R}^2$  con  $\|x\| = 1$  è un punto di accumulazione per  $E$  anche se  $x \notin E$ .

■ invece  $(2, 0) \in E$ , ma non è un punto di accumulazione per  $E$  (è un punto isolato).

# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

## Definizione

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- ① Chiamiamo **parte interna** di  $E$  l'insieme

$$\overset{\circ}{E} = \{x \in E : x \text{ è interno ad } E\}.$$

- ② Chiamiamo la **chiusura** di  $E$  l'insieme

$$\overline{E} = \{x \in E : x \text{ è aderente ad } E\}.$$

- ③ Chiamiamo la **frontiera** di  $E$  l'insieme  $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$ .

■ Dalla definizione segue immediatamente che

$$\overset{\circ}{E} \subseteq E \subseteq \overline{E}.$$

# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

## Esempio

Sia  $E \subset \mathbb{R}^2$  dato da

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\} \cup \{(2, t) : 0 < t < 1\} \cup \{(2, 2)\}$$

Si ha

$$\overset{\circ}{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\},$$

$$\partial E = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\} \cup \{(2, t) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(2, 2)\}$$

$$\bar{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\} \cup \{(2, t) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(2, 2)\}$$

# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

## Definizione (Insiemi aperti e insiemi chiusi)

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- 1 Diciamo che  $E$  è **aperto** se  $\overset{\circ}{E} = E$ .
- 2 Diciamo che  $E$  è **chiuso** se  $E = \overline{E}$ .

■ L'insieme  $E$  dell'esempio precedente non è né chiuso né aperto.



# Palle aperte e chiuse





# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

## Lemma (Proprietà degli aperti)

- 1 *Un insieme è aperto se e solo se il complementare è chiuso.*
- 2 *L'insiemi  $\mathbb{R}^n$  e  $\emptyset$  sono aperti.*
- 3 *L'unione di una famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto.*
- 4 *L'intersezione di una famiglia **finita** di insiemi aperti è un insieme aperto.*

■ Notiamo che l'insieme  $\mathbb{R}^n$  e  $\emptyset$  sono contemporaneamente aperti e chiusi.

## Lemma (Proprietà degli chiusi)

- 1 *L'intersezione di una famiglia di insiemi chiusi è un insieme chiuso.*
- 2 *L'unione di una famiglia **finita** di insieme chiusi è un insieme chiuso.*

# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

## Definizione (Insiemi limitati e insiemi compatti)

① Diciamo che  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  è **limitato** se esiste un  $R > 0$  tale che

$$E \subseteq B_R(0).$$

② Diciamo che  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  è **compatto** se è chiuso e limitato.

- L'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$  è limitato, ma non è compatto.
- L'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$  è limitato e chiuso e quindi compatto.