Spazi $\mathbb{R}^n$: concetti di base

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi Matematica B

Spazi $\mathbb{R}^n$

- Elementi di $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$

- $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare: dati $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ si definisce la somma

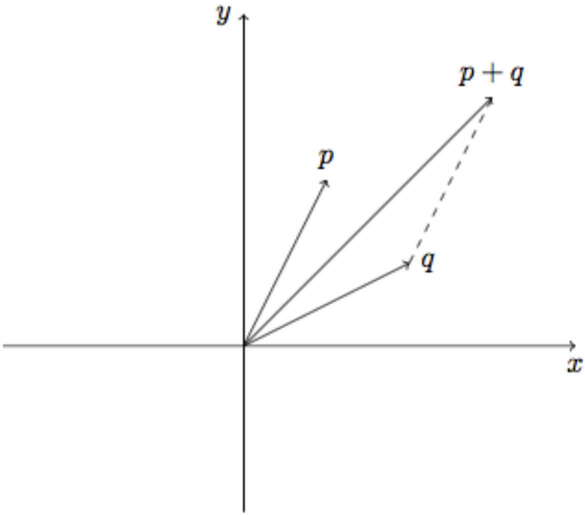
$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad (x + y) \in \mathbb{R}^n$$

e il prodotto per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$:

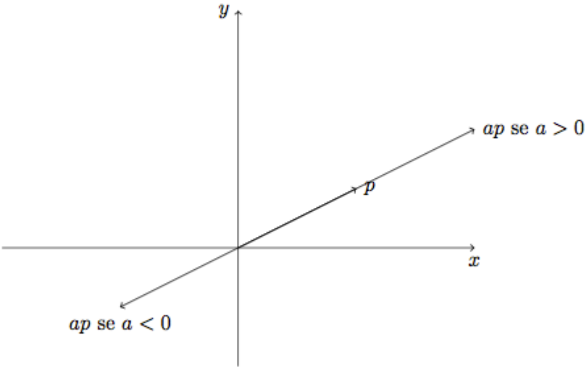
$$\lambda\, x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \quad \lambda x \in \mathbb{R}^n.$$

Interpretazione geometrica in $\mathbb{R}^2$

Dati $p, q \in \mathbb{R}^2$
$p + q$ è vettore della diagonale del parallelogramma



Interpretazione geometrica in $\mathbb{R}^2$



Dati $p \in \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}$

$ap \rightsquigarrow$ dilatazione/contrazione di p

Definizione (**Prodotto scalare**)

Dati $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *e* $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ *chiamiamo* **prodotto scalare** *di* x *e* y *il numero*

$$x \cdot y = x_1 \, y_1 + x_2 \, y_2 + \cdots + x_n \, y_n.$$

Definizione (**Norma**)

Dato $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *chiamiamo* **norma** *di* x *la quantità*

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Definizione (**Distanza euclidea**)

Dati $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *e* $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ *chiamiamo* **la distanza euclidea** *tra* x *e* y *la quantità*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Rileggiamo queste definizioni in $\mathbb{R}$..

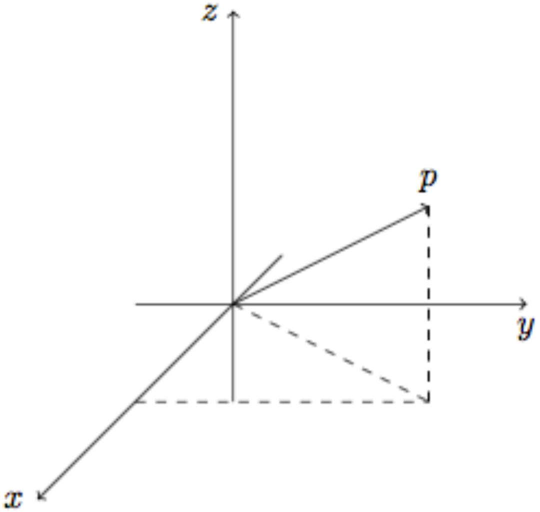
Lemma (Disuguaglianza di Schwarz)

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ *vale*

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Dimostrazione:

- Nel caso $n = 2, 3$ è possibile interpretare la norma di x come la lunghezza del vettore determinato da x.



Lemma (**Proprietà della norma**)

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti affermazioni:

1. $\|x\| \geq 0$ *e* $\|x\| = 0$ *se e solo se* $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.
3. *Disuguaglianza triangolare:* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dimostrazione: Le proprietà 1 e 2 seguono facilmente dalla definizione di norma (esercizio a casa). Per dimostrare la disuguaglianza triangolare, usiamo la disuguaglianza di Schwarz e notiamo che

■ In $\mathbb{R}^2$ la disuguaglianza di Schwarz (e quindi anche la disuguaglianza triangolare) è immediata conseguenza della formula

$$x \cdot y = \|x\| \, \|y\| \cos\varphi$$

dove φ indica l'angolo fra i due vettori x e y. Si nota che $x \cdot y = 0$ se e solo se i due vettori sono ortogonali.

Definizione (**Applicazioni lineari**)

Un'applicazione $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *si dice* **lineare** *se per ogni* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e ogni* $a, b \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$L(ax + by) = a\,L(x) + b\,L(y).$$

- Ad ogni applicazione lineare si può associare una matrice $A = (a_{ij})$ con m righe e n colonne tale che se

$$L(x) = y$$

con $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, allora

$$y_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n, \quad \forall\ k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Esempio

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$L(x, y) = (y, 2x + y, x - 3y)$$

Definizione (**Norma delle applicazioni lineari**)

Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *un'applicazione lineare. Chiamiamo norma di* L *la quantità*

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}$$

Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

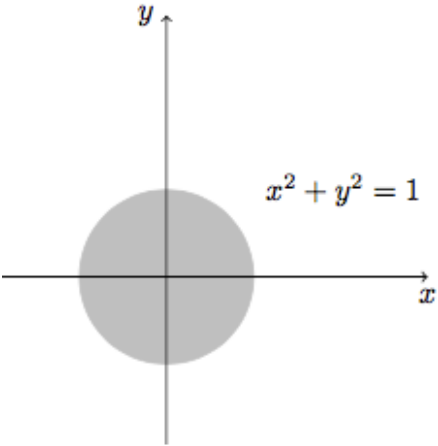
$$\|L(x)\| \; \leq \; \|L\| \, \|x\|.$$

Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Definizione (**Palla di centro x e raggio ε**)

Dati $x \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$ si dice palla di centro x e a raggio ε l'insieme

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, d(x,y) = \|x - y\| < \varepsilon\}$$



Definizione (**Intorno di un punto**)

Siano $x \in \mathbb{R}^n$ e $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che U è intorno di x se esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$B_\varepsilon(x) \subseteq U.$$

Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Analogamente come nel caso $n = 1$ si definiscono i seguenti concetti.

Definizione

1. *Diciamo che x è* **interno** *ad E se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subseteq E$.*
2. *Diciamo che x è* **di accumulazione** *per E se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha*
$$B_\varepsilon(x) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$
3. *Diciamo che x è* **punto isolato** *di E se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \cap E = \{x\}$.*
4. *Diciamo che x è* **aderente** *ad E se x è un punto di accumulazione per E oppure se x è un punto isolato di E.*

- Un punto di accumulazione per E non deve necessariamente appartenere ad E!

Esempio

Sia $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \, : \, \|x\| < 1\} \cup \{(2,0)\}$.

- ogni $x \in \mathbb{R}^2$ con $\|x\| = 1$ è un punto di accumulazione per E anche se $x \notin E$.

- invece $(2,0) \in E$, ma non è un punto di accumulazione per E (è un punto isolato).

Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Definizione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. *Chiamiamo* **parte interna** *di* E *l'insieme*

$$\overset{\circ}{E} = \{x \in E \ : \ x \text{ è interno ad } E\}.$$

2. *Chiamiamo la* **chiusura** *di* E *l'insieme*

$$\overline{E} = \{x \in E \ : \ x \text{ è aderente ad } E\}.$$

3. *Chiamiamo la* **frontiera** *di* E *l'insieme* $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$.

- Dalla definizione segue immediatamente che

$$\overset{\circ}{E} \subseteq E \subseteq \overline{E}.$$

Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Esempio

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ *dato da*

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x\| < 1\} \cup \{(2,t) : 0 < t < 1\} \cup \{(2,2)\}$$

Si ha

$$\mathring{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x\| < 1\},$$

$$\partial E = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x\| = 1\} \cup \{(2,t) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(2,2)\}$$

$$\overline{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x\| \leq 1\} \cup \{(2,t) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(2,2)\}$$

Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Definizione (Insiemi aperti e insiemi chiusi)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. *Diciamo che* E *è* **aperto** *se* $\overset{\circ}{E} = E$.
2. *Diciamo che* E *è* **chiuso** *se* $E = \overline{E}$.

- L'insieme E dell'esempio precedente non è né chiuso né aperto.

Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Lemma (Proprietà degli aperti)

1. *Un insieme è aperto se e solo se il complementare è chiuso.*
2. *L'insiemi $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ sono aperti.*
3. *L'unione di una famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto.*
4. *L'intersezione di una famiglia* **finita** *di insiemi aperti è un insieme aperto.*

- Notiamo che l'insieme $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ sono contemporaneamente aperti e chiusi.

Lemma (Proprietà degli chiusi)

1. *L'intersezione di una famiglia di insiemi chiusi è un insieme chiuso.*
2. *L'unione di una famiglia* **finita** *di insieme chiusi è un insieme chiuso.*

Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Definizione (Insiemi limitati e insiemi compatti)

1. *Diciamo che* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è **limitato** *se esiste un* $R > 0$ *tale che*
$$E \subseteq B_R(0).$$
2. *Diciamo che* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è **compatto** *se è chiuso e limitato.*

- L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x\| < 1\}$ è limitato, ma non è compatto.

- L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x\| \leq 1\}$ è limitato e chiuso e quindi compatto.