Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte sovrastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. PUNTEGGI. risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0;
3. La soglia di ammissione all'orale è 16 punti.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{2 + 2e^x + e^{2x}}$$

tale che $F(0) = 2 - \arctan 2$. Il limite $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ vale

Risp.: $\boxed{A}$: $\frac{\ln 2 - \ln 5}{2} - \frac{\pi}{4}$ $\boxed{B}$: $-\frac{\pi}{4} + 2$ $\boxed{C}$: e^2 $\boxed{D}$: $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2 - \ln 5}{2}$ $\boxed{E}$: $\frac{\ln 2 - \ln 5}{2} - \frac{\pi}{4} + 2$ $\boxed{F}$: $-e^2$

2. Sia $\tilde{y}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - xy = -x + \frac{1}{2}x^3 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Allora $\tilde{y}(1)$ vale

Risp.: $\boxed{A}$: $2e^{\frac{1}{2}}$ $\boxed{B}$: 2 $\boxed{C}$: 2π $\boxed{D}$: 0 $\boxed{E}$: $4e^{\frac{1}{2}} - 1$ $\boxed{F}$: $2e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{2}\sin^2(xy)} - \cos(xy)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha+1}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_α continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 7$ (b) f_α è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 7$ (c) $\frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) $\frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq 6$ (e) f_α ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 6$ (f) f_α ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 6$,

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (e)
$\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (e)

---

4. Si consideri la funzione $f(x,y) = y^2 \log\big(x-2\big) - 7x + x^2$, definita nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2\}$. Allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $(\frac{7}{2}, 0)$ è di massimo relativo, $(3,1)$ è di minimo relativo e $(3,-1)$ è di sella $\boxed{\text{B}}$: $(\frac{7}{2}, 0)$ è di minimo relativo, $(3,1)$ è di sella e $(3,-1)$ è di massimo relativo $\boxed{\text{C}}$: $(\frac{7}{2}, 0)$ è di massimo relativo e $(3,\pm 1)$ sono di minimo relativo $\boxed{\text{D}}$: $(\frac{7}{2}, 0)$ è di sella, $(3,1)$ è di minimo relativo e $(3,-1)$ è di massimo relativo $\boxed{\text{E}}$: $(\frac{7}{2}, 0)$ è di minimo relativo e $(3,\pm 1)$ sono di sella $\boxed{\text{F}}$: $(\frac{7}{2}, 0)$ è di sella, $(3,1)$ è di massimo relativo e $(3,-1)$ è di minimo relativo

---

5. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \exp\left(|y - 7x|\right)$$

nel dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 14x\}$. Detti $M = \max_T f$ e $m = \min_T f$, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = 0$, $M = 7$ $\boxed{\text{B}}$: $m = 0$, $M = 14$ $\boxed{\text{C}}$: $m = 1$, $M = \exp(7)$
$\boxed{\text{D}}$: $m = \exp(-7)$, $M = \exp(7)$ $\boxed{\text{E}}$: $m = -7$, $M = 7$ $\boxed{\text{F}}$: $m = \exp(-7)$, $M = \exp(14)$

---

6. Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = \sqrt{3}\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\vec{\imath} + \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\vec{\jmath} + \sqrt{3}t^2\,\vec{k}, \quad t \in [0, \sqrt{3}];$$

la sua lunghezza vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: $4\sqrt{3}$ $\boxed{\text{C}}$: $2\sqrt{3}$ $\boxed{\text{D}}$: 4 $\boxed{\text{E}}$: 3 $\boxed{\text{F}}$: 2

---

7. Siano dati il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y-7}{x^2+(y-7)^2}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{x}{x^2+(y-7)^2}\right)\vec{\jmath}$$

e le curve γ e $\tilde{\gamma}$ di rappresentazione parametrica, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (\cos(t), \sin(t)+7), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \text{per } \gamma, \\ \vec{\eta}(t) &= (\cos(t)+3, \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \text{per } \tilde{\gamma}. \end{aligned}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) F è irrotazionale (b) $\int_\gamma \vec{F} = 0$ (c) $\int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} = 2\pi$ (d) $\int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} = 0$ (e) $\vec{F}$ è conservativo (f) $\int_\gamma \vec{F} = 2\pi$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{C}}$: (c), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c)

---

8. Data $f(x,y) = x + y^2$, sia $\nabla f(x,y)$ il suo gradiente con norma $\|\nabla f(x,y)\|$. L'integrale

$$\iint_R y\sqrt{1+\|\nabla f(x,y)\|^2}\,dxdy$$

dove $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{2\sqrt{2}}{7}$ $\boxed{\text{B}}$: $2\sqrt{3}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{13\sqrt{3}}{7}$ $\boxed{\text{D}}$: 0 $\boxed{\text{E}}$: $\frac{13\sqrt{2}}{3}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{26\sqrt{2}}{3}$
