Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte sovrastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. PUNTEGGI. risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0;
3. La soglia di ammissione all'orale è 16 punti.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. L'integrale

$$\int_0^1 e^x \log(e^x+2)\,dx$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $(e+2)\log\left(\frac{e+2}{3}\right)+1-e$ $\boxed{\text{B}}$: $(e+2)\log(e+2)-3\log(3)+2-e$
$\boxed{\text{C}}$: $(e+2)\log\left(\frac{e+2}{3}\right)+2-e$ $\boxed{\text{D}}$: $(e+2)\log(e+2)-3\log(3)+1-e$ $\boxed{\text{E}}$: $3\log\left(\frac{e+2}{3}\right)+2$
$\boxed{\text{F}}$: $(e+2)\log(e+2)-3\log(3)$

2. Sia $\tilde{y}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''-y=3x \\ y(0)=0 \\ y'(0)=-3. \end{cases}$$

Allora

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\tilde{y}(x)}{x\arctan(x)}$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{3}{\pi}$ $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: ∞ $\boxed{\text{D}}$: -3 $\boxed{\text{E}}$: 3 $\boxed{\text{F}}$: $-\frac{6}{\pi}$

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (|x|+|y|)^{7\alpha-1}\log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{7}$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{7}$ (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \geq \frac{2}{7}$ (d) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ esiste, nulla, se e solo se $\alpha > \frac{2}{7}$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{7}$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > \frac{2}{7}$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (c), (f)

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2(5-x-y)\,.$$

Calcolarne i punti stazionari e classificarli. Delle seguenti affermazioni

(a) f ha infiniti punti di minimo relativo (b) f ha un solo punto di sella (c) tutti i punti della retta $y = 5 - x$ sono di sella (d) tutti i punti dell'asse y sono di sella (e) tutti i punti dell'asse x sono di massimo relativo (f) f ha infiniti punti di massimo relativo

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d) $\boxed{\text{C}}$: (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (f)

---

5. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + (y-6)^2$$

nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\,,\ y \geq 0,\ y \geq -x\}$. Detti $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = 0$ e $M = 9$ $\boxed{\text{B}}$: $m = 0$ e $M = 45$ $\boxed{\text{C}}$: $m = 9$ e $M = 45$ $\boxed{\text{D}}$: $m = 3$ e $M = 15$ $\boxed{\text{E}}$: $m = -9$ e $M = 9$ $\boxed{\text{F}}$: $m = 27$ e $M = 45$

---

6. L'integrale

$$\int_\Gamma \frac{y}{(x+1)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\,ds,$$

ove Γ è il grafico della funzione $f(x) = 2\sqrt{x}$ per $x \in [1,4]$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: $4 - 4\arctan(2) + \pi$ $\boxed{\text{C}}$: $4 - 4\arctan(2) + 2\pi$ $\boxed{\text{D}}$: $4 - \log(2)$ $\boxed{\text{E}}$: $4 + 4\arctan(2) - \pi$ $\boxed{\text{F}}$: $2 - 2\arctan(2) + \pi$

---

7. Siano dati il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = [3x^2 \sin(y) \exp\left(x^3 \sin(y)\right)]\,\vec{i} + \left[x^3 \cos(y) \exp\left(x^3 \sin(y)\right) + \frac{1}{1+(y+2)^2}\right]\vec{j}.$$

e la curva γ di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Delle seguenti affermazioni

(a) $\int_\gamma \vec{F} = 2\pi$ (b) $\partial_y F_1(x,y) - \partial_x F_2(x,y) = 3x^2$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(c) $\varphi(x,y) = \exp\left(x^3 \sin(y)\right) + \arctan(y+2) + 7$ è un potenziale per $\vec{F}$ (d) $\int_\gamma \vec{F} = 0$

(e) l'integrale di $\vec{F}$ lungo il segmento congiungente $(0,0)$ a $(1,\pi)$ vale $\arctan(\pi+2) - \arctan(2)$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (e) $\boxed{\text{B}}$: (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c) $\boxed{\text{D}}$: (c), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e) $\boxed{\text{F}}$: (c), (e)

---

8. L'integrale

$$\iint_T \left[\exp\left(x^{49}+6\right)\arctan(y^3) + x^2\right]\,dxdy$$

dove $T = R \setminus C$ e

$$R = [-7,7] \times [-1,1], \qquad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{8}{3}\,343 - \frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{4}{3}\,343 - \frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{4}{3}\,343 - \frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{4}{3}\,343$ $\boxed{\text{E}}$: 0 $\boxed{\text{F}}$: $\frac{2}{3}\,343 + \frac{\pi}{4}$
