Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte sovrastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. PUNTEGGI. risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0;
3. La soglia di ammissione all'orale è 16 punti.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. L'integrale
$$\int_0^{\ln 2} \frac{2e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$$
vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: e^2 $\boxed{\text{B}}$: $\ln(2)$ $\boxed{\text{C}}$: 2 $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: 0 $\boxed{\text{F}}$: $2\ln(2)$

2. Sia $\tilde{y} :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = x^2 e^x \\ y(1) = 3 \end{cases}$$
Allora $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tilde{y}(x)}{x}$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 3 $\boxed{\text{B}}$: e^3 $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{3}$ $\boxed{\text{D}}$: $+\infty$ $\boxed{\text{E}}$: 0 $\boxed{\text{F}}$: 2

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2) - 2\arctan(xy^2)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{3}$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{3}$ (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq \frac{1}{3}$ (d) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ esiste per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (e) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{3}$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{3}$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d)

---

4. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = y + \frac{x^2}{4y} - \log x$. Dopo aver determinato $A = \mathrm{dom}(f)$ e i punti stazionari di f in A, si determini se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (1, \frac{1}{2})$, che risulta un punto di minimo relativo $\boxed{\text{B}}$: f ha due punti stazionari $P_{\pm} = (\pm 1, \frac{1}{2})$, che risultano essere entrambi punti di minimo relativo $\boxed{\text{C}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (1, \frac{1}{2})$, che risulta un punto di massimo relativo $\boxed{\text{D}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (1, \frac{1}{2})$, che risulta un punto di sella $\boxed{\text{E}}$: f ha due punti stazionari $P_{\pm} = (\pm 1, \frac{1}{2})$: P_+ è di minimo relativo, P_- è di massimo relativo $\boxed{\text{F}}$: f ha due punti stazionari $P_{\pm} = (\pm 1, \frac{1}{2})$: P_+ è di massimo relativo, P_- è di sella

---

5. Siano T il dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$ e $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + 1$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$, si ha

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = \frac{5}{3}$ e $M = 2$ $\boxed{\text{B}}$: $m = 2$ e $M = 10$ $\boxed{\text{C}}$: $m = \frac{5}{3}$ e $M = 10$ $\boxed{\text{D}}$: $m = 3$ e $M = 10$ $\boxed{\text{E}}$: $m = 2$ e $M = 3$ $\boxed{\text{F}}$: $m = \frac{5}{3}$ e $M = 3$

---

6. L'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \left(\frac{2}{3}x + 4z\right)\,\mathrm{d}s$, dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica

   $\vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} + \dfrac{3t^2}{2}\,\vec{j} + t^3\vec{k}$, $t \in [0,1]$, vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $(3)^{3/2} - 1$ $\boxed{\text{B}}$: $2((3)^{1/2} - 1)$ $\boxed{\text{C}}$: $(3)^{1/2} - 1$ $\boxed{\text{D}}$: $2((3)^{3/2} - 1)$ $\boxed{\text{E}}$: $3((3)^{3/2} - 1)$ $\boxed{\text{F}}$: $3((3)^{1/2} - 1)$

---

7. Siano dati il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \dfrac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{x+2}}\,\vec{i} + \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{y+2}}\,\vec{j}$ e Γ la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = \cos^5 t\,\vec{i} + \sin^5 t\,\vec{j}$ con $t \in [0,\pi]$, orientata da $\vec{r}(\pi)$ a $\vec{r}(0)$. Dopo aver calcolato $\mathrm{dom}(\vec{F})$, si determini se $\vec{F}$ è conservativo. Allora l'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $-2\sqrt{6}$ $\boxed{\text{C}}$: $-2\sqrt{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $-2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ $\boxed{\text{E}}$: $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ $\boxed{\text{F}}$: $-\sqrt{6}$

---

8. L'integrale doppio

$$\iint_C \cos(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

con

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3,\; y \geq x\}$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{2}\,(\sin(3) - \sin(2))$ $\boxed{\text{C}}$: $2\pi\,(\sin(3) - \sin(2))$

$\boxed{\text{D}}$: $\frac{\pi}{8}\,(\sin(9) - \sin(4))$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{8}\,(\sin(3) - \sin(2))$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{4}\,(\sin(9) - \sin(4))$
