Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte sovrastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. PUNTEGGI. risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0;
3. La soglia di ammissione all'orale è 16 punti.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. L'integrale
$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [\cos^3(x) - \sin^3(x)]\, dx$$
vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $\boxed{\text{B}}$: $2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{2}{3}\sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{3}\sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $\boxed{\text{E}}$: $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{5}\right)$ $\boxed{\text{F}}$: $2\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

2. Sia $\tilde{y}$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - y = \sin(2x) \\ y(0) = 8 \\ y'(0) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$
Allora $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\tilde{y}(x)$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $4e$ $\boxed{\text{B}}$: non esiste $\boxed{\text{C}}$: 4 $\boxed{\text{D}}$: 0 $\boxed{\text{E}}$: 8 $\boxed{\text{F}}$: 2

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x^2y) - 2y\arctan(xy)}{x^2+y^2} & \text{se}(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) $\nabla f\,(0,0) = (0,0)$ (b) $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 3v_1^2v_2 - 2v_1v_2^2$ per ogni versore $v = (v_1, v_2)$ (c) f è differenziabile in $(0,0)$ (d) f non è continua in $(0,0)$ (e) f è continua in $(0,0)$ (f) f non è differenziabile in $(0,0)$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (c), (e)

---

4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = 3x^2y(x-y) + 49$. Allora

$\boxed{\text{A}}$: f ammette un punto di sella e infiniti punti di massimo relativo $\boxed{\text{B}}$: f ammette un punto di sella e infiniti punti di minimo relativo $\boxed{\text{C}}$: f ammette infiniti punti di sella $\boxed{\text{D}}$: f ammette infiniti punti di massimo relativo e un punto di minimo relativo $\boxed{\text{E}}$: f ammette infiniti punti di minimo relativo e un punto di massimo relativo $\boxed{\text{F}}$: f ammette due punti di sella

---

5. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \arctan\left(\sqrt{(x-6)^2 + (y-6)^2}\right)$$

nel dominio $D = R \setminus C$, con

$$\begin{cases} R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| - 3 \leq y \leq 3 - |x|\}, \\ C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4\}. \end{cases}$$

Detti $M = \max_D f$ e $m = \min_D f$, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = \frac{9}{\sqrt{2}}$, $M = 3\sqrt{13}$ $\boxed{\text{B}}$: $m = \arctan\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)$, $M = \arctan(3\sqrt{13})$ $\boxed{\text{C}}$: $m = 0$, $M = \arctan(3\sqrt{13})$ $\boxed{\text{D}}$: $m = 0$, $M = \arctan\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)$ $\boxed{\text{E}}$: $m = -\arctan\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)$, $M = \arctan\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)$ $\boxed{\text{F}}$: $m = -\frac{9}{\sqrt{2}}$, $M = \frac{\sqrt{13}}{2}3$

---

6. L'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \sqrt{\frac{1}{1+\frac{4y}{3}}} \log(x+7)\ \mathrm{d}s$$

lungo la curva Γ di rappresentazione parametrica $r(t) = t\,\vec{i} + \frac{t^2}{3}\,\vec{j}$, $t \in [0,1]$, vale

$\boxed{\text{A}}$: $\log(6) + 8\log\left(\frac{6}{7}\right)$ $\boxed{\text{B}}$: $49\log\left(\frac{8}{7}\right) - 1$ $\boxed{\text{C}}$: $1 - \log(8) - 7\log\left(\frac{8}{7}\right)$ $\boxed{\text{D}}$: $\log(8) + 7\log\left(\frac{8}{7}\right) - 1$ $\boxed{\text{E}}$: $\log(7) + 8\log\left(\frac{6}{8}\right)$ $\boxed{\text{F}}$: 0

---

7. Siano α, $\beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{F} : \mathrm{dom}(\vec{F}) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$\vec{F}(x,y) = \left(3\frac{y^3}{x} + 4x\sin(4x^2) + \alpha e^{2y}\right)\overrightarrow{i} + \left(\beta y^2\log(x) + \frac{7}{1+y^2} + 16xe^{2y}\right)\overrightarrow{j}\,.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) $\vec{F}$ è irrotazionale se e solo se $\alpha = 8$ e $\beta = 9$ (b) per $\alpha = 8$ e $\beta = 9$ si ha che $\int_\gamma \vec{F} = 0$, ove γ è la circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio 1 (c) $\vec{F}$ è conservativo se e solo se $\alpha = 16$ e $\beta = 3$ (d) per $\alpha = 16$ e $\beta = 3$ si ha che $\varphi(x,y) = 3y^3\log(x) + 8xe^{2y} - \frac{1}{2}\cos(4x^2) + 7\arctan(y)$ è un potenziale per $\vec{F}$ (e) per $\alpha = 8$ e $\beta = 9$ si ha che $\varphi(x,y) = 3y^3\log(x) + 8xe^{2y}$ è un potenziale per $\vec{F}$ (f) $\mathrm{dom}(\vec{F}) = (0,+\infty) \times \mathbb{R}$ e $\vec{F}$ è conservativo se e solo se $\alpha = 8$ e $\beta = 9$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a) $\boxed{\text{B}}$: (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (d)

---

8. Sia T il trapezio di vertici $A = (3,0)$, $B = (3,3)$, $C = (5,5)$, $D = (5,0)$. L'integrale

$$\iint_T \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{2}\log\left(\frac{5}{3}\right)$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{\pi}{2}\log(5)$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{\pi}\log\left(\frac{7}{5}\right)$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{4}\log\left(\frac{5}{3}\right)$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{4}\log\left(\frac{7}{5}\right)$
