Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi Matematica B

Derivate direzionali e parziali

Consideriamo un insieme **aperto** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e un campo **scalare**

$$f : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un **versore**, cioè un vettore di lungheza unitaria: $\|v\| = 1$.

Definizione

Sia $x_0 \in \Omega$. Chiamiamo **il rapporto incrementale di f nella direzione v** *la quantità*

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Derivate direzionali e parziali

Definizione

Se esiste finito, il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

è detto **derivata direzionale** *di f in x_0 nella direzione v e si indica con*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0), \quad D_v f(x_0).$$

In questo caso f si dice **derivabile** *in x_0 nella direzione v.*

- Nella definizione precedente intervengono solo i valori di f lungo la retta $x_0 + tv$. Dunque l'esistenza della derivata in una direzione non garantisce l'esistenza della derivata in un'altra direzione!

Derivate direzionali e parziali

Definizione

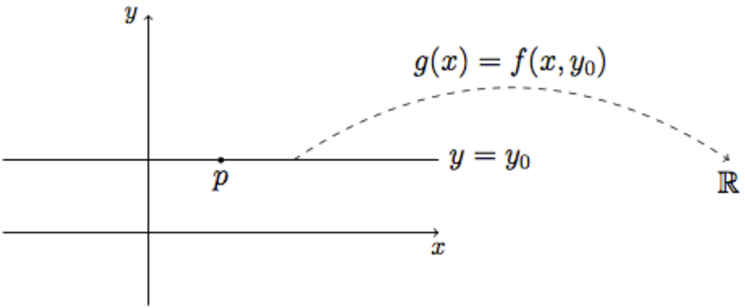
Se $v = e_i$ (il versore $i-$esimo della base canonica), la derivata direzionale è detta **derivata parziale di f rispetto a** x_i *e si indica con*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \qquad D_i f(x_0).$$

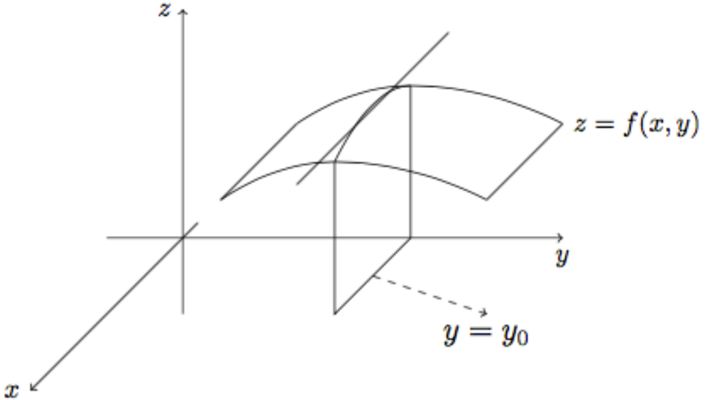
- In $D_i f$ varia solo la variabile x_i. Quindi per il calcolo si può pensare alle altre variabili come a delle costanti ed applicare le regole di derivazione valide per le funzioni di una sola variabile.

Il caso di funzioni di due variabili

Il caso di funzioni di due variabili



y
$g(x) = f(x, y_0)$
$y = y_0$
p
$\mathbb{R}$
x


z
$z = f(x,y)$
y
$y = y_0$
x

Derivate direzionali e parziali: esempi

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = x^3 \sin(y^2).$$

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y, z) = x^3 - 5x\,y^2 + 4\sin(x + e^z) + z\,\cos y.$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\,y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Attenzione! Sarebbe sbagliato calcolare le derivate parziali nel punto $(0,0)$ come limiti delle derivate $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. In generale non vale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \textbf{NO}!$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \qquad \textbf{NO}!$$

perché a priori non abbiamo nessuna informazione circa la continuità delle derivate parziali nel punto $(0,0)$. In effetto, nell'esempio precedente si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \nexists \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \nexists$$

Derivabilità direzionale e continuità

A differenza delle funzioni di una sola variabile, nel caso di funzioni di più variabili l'esistenza delle derivate parziali **non garantisce** la continuità : abbiamo visto che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\,y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ammette entrambe le derivate parziali nel punto $(0,0)$. D'altra parte si vede facilmente che f non è continua in $(0,0)$:

Nemmeno l'esistenza di **tutte le derivate direzionali** garantisce la continuità :

Esempio

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad y \leq 0 \ \ \text{oppure} \ \ y > x^2 \\ 1 & \text{se} \quad 0 < y \leq x^2. \end{cases}$$

Risulta che f *ammette tutte le derivate direzionali in* $(0,0)$, *ma non vi è continua.*

- Perciò è necessario introdurre una nozione più forte della derivabilità direzionale: **la differenziabilità** .

Funzioni differenziabili

Consideriamo per semplicità solo i campi scalari.

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare. Sia inoltre $x \in \Omega$ e supponiamo che f ammetta tutte le derivate parziali in x. Il vettore

$$\nabla f(x) = grad\, f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

si chiama **gradiente** *di f nel punto x.*

- Notiamo che

$$\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

Funzioni differenziabili

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare. Sia inoltre $x_0 \in \Omega$. Diciamo che f è **differenziabile** *in x_0 se esiste $\lambda(x_0) \in \mathbb{R}^n$ tale che*

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \quad x \to x_0, \tag{1}$$

Diciamo che f è differenziabile in Ω se è differenziabile in ogni punto di Ω.

- Ricordiamo il significato della notazione $o(\|x - x_0\|)$:

$$h(x) = o(\|x - x_0\|) \text{ per } \ x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Funzioni differenziabili

Teorema

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare. Sia inoltre $x_0 \in \Omega$. Allora f è **differenziabile** *in x_0* **se e solo se** *f ammette tutte le derivate parziali in x_0 e se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0. \tag{2}$$

- Quindi f è differenziabile in x_0 se vale (1) con $\lambda(x_0) = \nabla f(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \quad x \to x_0, \tag{3}$$

Differenziabilità per funzioni di una variabile

Differenziabilità per funzioni di due variabili

Proprietà delle funzioni differenziabili

Teorema (Differenziabilità e continuità)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*. Sia inoltre* $x_0 \in \Omega$*. Se* f *è differenziabile in* x_0*, allora* f *è continua in* x_0*.*

- Il viceversa è in generale falso: la continuità **non implica** la differenziabilità !

Dimostrazione:

Teorema (**Differenziabilità e derivabilità**)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Sia inoltre $x_0 \in \Omega$. Se f è differenziabile in x_0, allora f è derivabile in x_0 lungo ogni direzione v e vale

$$D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

Dimostrazione:

Proprietà delle funzioni differenziabili

Anche in questo caso non vale il viceversa: derivabilità in ogni direzione **non implica** differenziabilità .

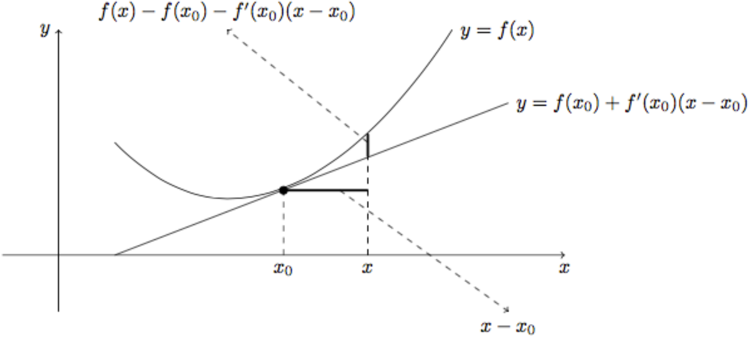
Esempio

La funzione

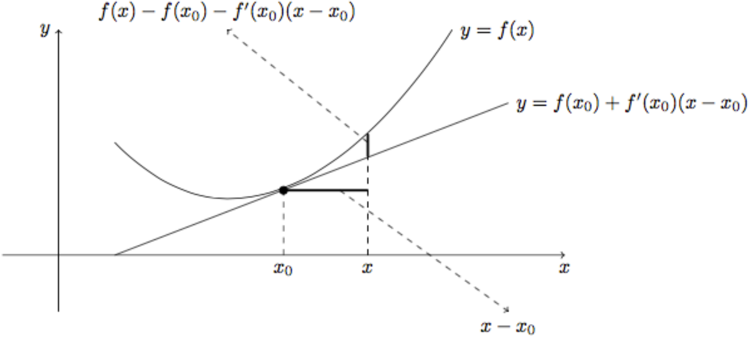
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$*, ma non è differenziabile in* $(0,0)$*.*

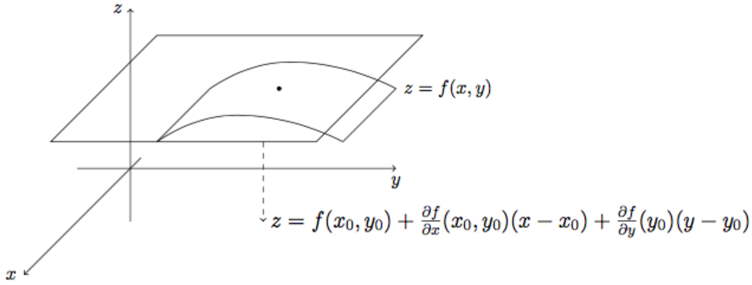
Interpretazione geometrica della differenziabilità per funzioni di una variabile



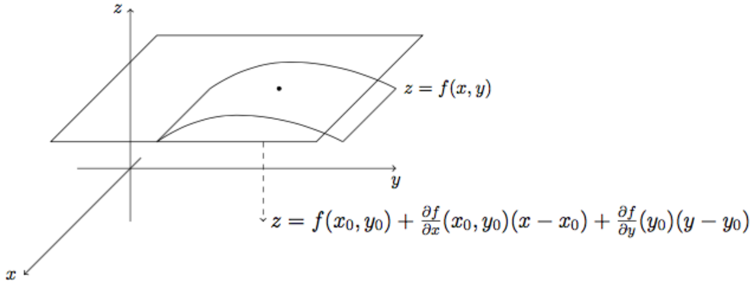
Interpretazione geometrica della differenziabilità per funzioni di una variabile



Interpretazione geometrica della differenziabilità per funzioni di DUE variabill



Interpretazione geometrica della differenziabilità per funzioni di DUE variabill



Teorema (**Differenziabilità di somme e prodotti**)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto e sia* $x_0 \in \Omega$. *Siano* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *due funzioni differenziabili in* x_0. *Allora sono differenziabili in* x_0 *anche le funzioni somma* $f + g$ *e prodotto* $f\,g$.

Teorema (**Differenziabilità della composizione)**

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto e sia* $x_0 \in \Omega$. *Sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione differenziabile in* x_0. *Sia inoltre* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione differenziabile in* $f(x_0) \in \mathbb{R}$. *Allora la funzione composta* $\varphi \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ *è differenziabile in* x_0 *e vale*

$$\varphi(f(x)) = \varphi(f(x_0)) + \varphi'(f(x_0))\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|),$$

per $x \to x_0$.

Teorema (Teorema del differenziale totale)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $x_0 \in \Omega$. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che f ammetta in Ω tutte le derivate parziali $D_i f$, $i = 1, .., n$, e che esse siano **continue in** x_0*. Allora f è differenziabile in x_0.*

- Non vale il viceversa

Definizione (Funzioni di classe C^1)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è di classe C^1 se esistono le derivate parziali di f in Ω ed esse sono funzioni **continue**. *L'insieme delle funzioni di classe C^1 da Ω in $\mathbb{R}$ si indica con il simbolo $C^1(\Omega)$.*

- Nel loro dominio naturale sono di classe C^1 tutte le funzioni elementari e le loro composizioni; per esempio polinomi, funzioni razionali fratte, logaritmi etc.

Dal Teorema del differenziale totale segue che ogni funzione di classe $C^1(\Omega)$ è differenziabile in Ω. Più in generale abbiamo il seguente schema riassuntivo:

$$f \in C^1(\Omega) \;\Rightarrow\; f \text{ differenziabile in } \Omega \;\Rightarrow\; \begin{cases} f \text{ continua in } \Omega \\ \\ \forall\, v \in \mathbb{R}^n \,:\, \exists\, D_v f \end{cases}$$

Derivate di secondo ordine e di ordine superiore

Definizione

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione. Sia* $x_0 \in \Omega$*. Diciamo che* f *è derivabile due volte in* x_0 *rispetto ai versori* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *ed indicheremo tale derivata con il simbolo*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}(x_0)$$

se valgono le seguenti condizioni:

1. *Esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che la funzione* f *è derivabile nella direzione* v *su* $B_\varepsilon(x_0) \subseteq \Omega$*. In tal modo è ben definita la funzione*

$$D_v f : B_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{R}$$

2. *La funzione* $D_v f$ *è derivabile in* x_0 *nella direzione* w*. Poniamo*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}(x_0) = D_w(D_v f)(x_0).$$

Derivate di secondo ordine e di ordine superiore

Nel caso in cui v e w sono versori della base canonica di $\mathbb{R}^n$, ad esempio $v = e_i$ e $w = e_j$, parliamo delle **derivate parziali seconde** ed usiamo la notazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad (i \neq j), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (i = j).$$

Nel caso $n = 2$ scriveremo $x = x_1$, $y = x_2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y f,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial^2_{xy} f, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial^2_{xx} f,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \partial^2_{yx} f, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \partial^2_{yy} f,$$

Derivate di secondo ordine e di ordine superiore

Esempio: Se $f(x,y) = e^{xy} + \sin y$, allora

Notiamo che $\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f$. Questa proprietà vale in generale per le funzioni con derivate seconde continue.

Definizione (Funzioni di classe C^2)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è di classe C^2 e scriviamo $f \in C^2(\Omega)$, se $f \in C^1(\Omega)$ e se

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m), \quad i = 1, \dots, n.$$

Vale il seguente risultato:

Lemma (Lemma di Schwarz)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f \in C^2(\Omega)$. Allora per ogni $x \in \Omega$ e ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Esempio: Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y, z) = e^{xz} + x^2 y^3 z$.

Definizione (Funzioni di classe C^k)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è di classe C^k con $k \in \mathbb{N}$ e scriviamo $f \in C^k(\Omega)$, se $f \in C^1(\Omega)$ e se

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Se $f \in C^k(\Omega)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, diremo che $f \in C^\infty(\Omega)$.