Curve

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi Matematica B

Introduzione

- Le curve sono particolari **campi vettoriali**

- Le vedremo in

Curve

Definizione (Curva in $\mathbb{R}^n$)

Chiamiamo curva a valori in $\mathbb{R}^n$ ogni applicazione $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ con $[a, b] \subset \mathbb{R}$. I punti $\gamma(a), \gamma(b) \in \mathbb{R}^n$ si dicono gli estremi della curva γ. L'immagine $\gamma(a, b) \subset \mathbb{R}^n$ si dice il sostegno (o supporto) della curva.

- Quindi una curva a valori in $\mathbb{R}^n$ è una n-upla di funzioni da $[a, b]$ in $\mathbb{R}$:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t)), \qquad \gamma_j : [a, b] \to \mathbb{R}, \ j = 1, \ldots, n.$$

Scriveremo anche

e parleremo di *equazione parametrica* della curva.

Altre notazioni...

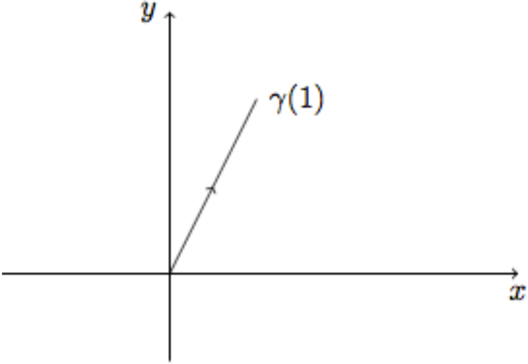
La motivazione meccanica del concetto di curva

Esempio 1

- La curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\gamma(t) = (t, 2t) \qquad \forall\, t \in [0,1]$$

ha come sostegno il segmento che congiunge i punti $(0,0)$ e $(1,2)$.



La curva $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\widetilde{\gamma}(t) = (1 - t, 2 - 2t) \qquad \forall\, t \in [0,1]$$

Esempio 2

Più in generale, dati p, $q \in \mathbb{R}^n$, la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) := (1-t)p + tq \qquad \forall\, t \in [0,1]$$

è il segmento congiungente p a q.

Esempio 2

- La curva $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ data da
$$\gamma(t) = (t, t^2) \qquad \forall\, t \in [-1,1]$$
ha come sostegno l'arco di parabola che congiunge $(-1,1)$ e $(1,1)$.

Esempio 3

- La curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t) \qquad R > 0, \qquad \forall\, t \in [0, 2\pi]$$

ha come sostegno la circonferenza di raggio R e di centro $(0, 0)$.

Esempio 4

- La curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \qquad R > 0, \qquad \forall\, t \in [0, 2\pi]$$

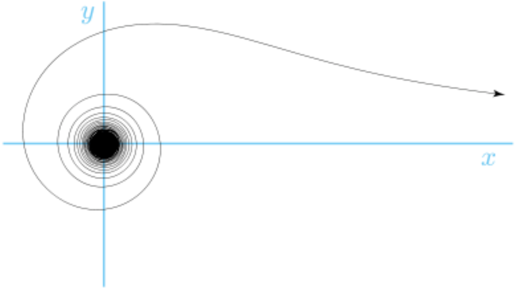
ha come sostegno l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Esempio 5

- La curva $\gamma : [1, \infty) \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{t}, \frac{\sin t}{t} \right)$$

ha come sostegno l'arco della spirale iperbolica:



Esempio 6

- La curva $\gamma : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\gamma(t) = \left(e^t \cos t,\ e^t \sin t\right)$$

ha come sostegno l'arco della spirale logaritmica:

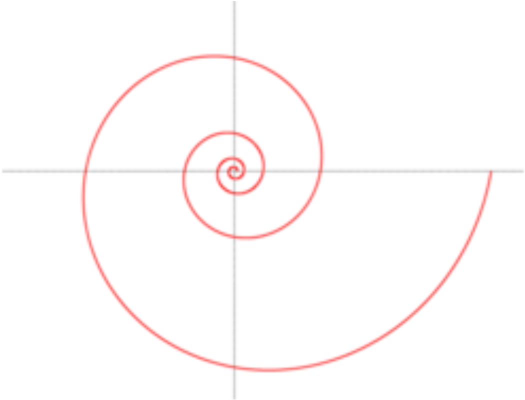


Figure: Sezione della conchiglia di un Nautilus (mollusco)

Figure: Galassia Vortice, distanza dalla Terra: 15-37 milioni di anni luce

Leggere su [Bonfanti-Secchi] il paragrafo sulle operazioni algebriche fra curve....

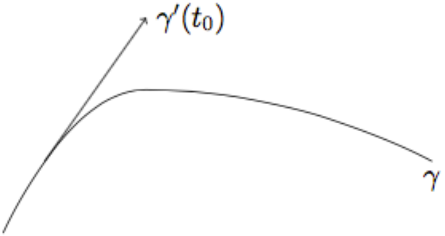
Definizione (Derivata della curva e vettore tangente)

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva. Diciamo che γ è derivabile in $t_0 \in (a,b)$ se sono derivabili in t_0 le funzioni γ_j, $j = 1, \ldots, n$. [Notare che $\gamma_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ per ogni $j = 1, \ldots, n$.] In tal caso scriviamo

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \ldots, \gamma_n'(t_0))$$

Il vettore $\gamma'(t_0)$ si dice il **vettore tangente** *a γ nel punto $\gamma_0 = \gamma(t_0)$.*

Intepretazione meccanica:



Definizione (Retta tangente)

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva derivabile in* $t_0 \in (a, b)$. *Chiamiamo retta tangente alla curva nel punto* $\gamma_0 = \gamma(t_0)$ *la retta*

- *passante per* γ_0
- *parallela al vettore* $\gamma'(t_0)$

che è quindi data in forma parametrica da:

Esempio

Sia $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

Curve regolari

Definizione (Curve regolari e curve regolari a tratti)

Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *si dice*

1. **regolare** *se* $\gamma \in C^1([a, b])$ *e se* $\gamma'(t) \neq 0$ *per ogni* $t \in (a, b)$.
2. **regolare a tratti** *se* $\gamma \in C^0([a, b])$ *e se esiste una suddivisione di* $[a, b]$ *tale che* γ *sia regolare in ogni subintervallo.*
3. **chiusa** *se* $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Versore tangente e versore normale

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva derivabile in $t_0 \in (a, b)$ con $\gamma'(t_0) \neq 0$.

- Il versore
$$T(t_0) := \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$$
è detto *versore tangente* alla curva in $\gamma_0 = \gamma(t_0)$.
- Supponiamo che $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia derivabile in (a, b) con $\gamma'(t) \neq 0$. Quindi è ben definito $T : (a, b) \to \mathbb{R}^n$. Supponiamo che T sia derivabile in $t_0 \in (a, b)$ con $T'(t_0) \neq 0$. Il versore
$$N(t_0) := \frac{T'(t_0)}{\|T'(t_0)\|}$$
è detto *versore normale* (principale) alla curva in $\gamma_0 = \gamma(t_0)$.

I versori tangente e normale sono fra loro ortogonali

Esempio

Sia γ la circonferenza di raggio R centrata nell'origine:

Esempio

Sia γ *l'arco di parabola ristretta all'intervallo* $[-1,1]$*:*

$$\gamma(t) = \left(t\,,\,\frac{t^2}{2}\right) \qquad t \in [-1,1].$$

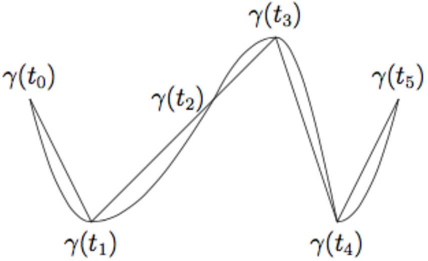
Curve rettificabili

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva continua e sia

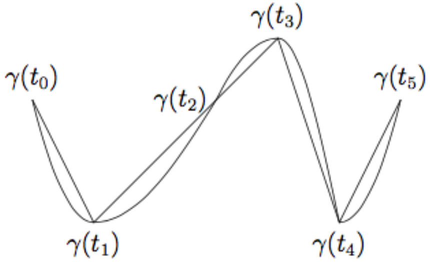
$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$$

una suddivisione di $[a, b]$, e corrispondentemente i punti $\gamma(t_k)$, $k = 0, \ldots, m$ di $\gamma([a, b])$.

Consideriamo la poligonale $\mathcal{P}$ inscritta nella curva γ che si ottiene congiungendo i punti $\gamma(t_k)$, $k = 0, \ldots, m$.



Lunghezza della poligonale



La lunghezza di $\mathcal{P}$ è data da

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \,.$$

Curve rettificabili e lunghezza di una curva

Definizione (Curve rettificabili)

La curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *è detta* **rettificabile** *se l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte, al variare di tutte le possibili suddivisioni di* $[a, b]$*, e cioè*

$$\sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P})$$

è finito. In tal caso definiamo la **lunghezza** *di* γ *come*

$$L(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}) .$$

Se $\sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}) = +\infty$*, allora diciamo che* γ *è* **non rettificabile***.*

Curve rettificabili

Esempio

Data la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t\cos\left(\frac{\pi}{t}\right) & 0 < t \leq 1 \\ 0 & t = 0, \end{cases}$$

la curva descritta da

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \qquad t \in [0, 1]$$

è continua ma non rettificabile.

- La funzione f è continua.

Teorema

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare. Allora γ è rettificabile è vale

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Intepretazione meccanica:

$L(\gamma) = 0$ se e solo se....

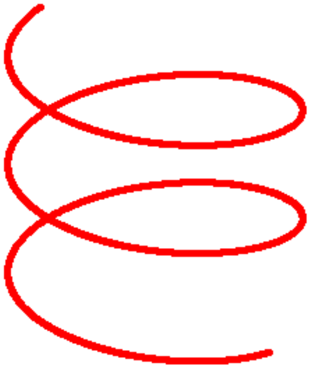
Esempio

Sia $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$. *Si ha* $\gamma'(t) = (-R\ \sin t, R\ \cos t)$ *e quindi*

Elica

Consideriamo l'arco d'elica $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^3$ di raggio R data da

$$\gamma(t) = (R\cos(2\pi t), R\sin(2\pi t), t), \qquad t \in [0,2].$$



Lunghezza dell'arco di elica

Curve piane

Nel caso $n = 2$ chiamiamo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *curva piana* e scriviamo

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \qquad t \in [a, b].$$

■ Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $f \in C^1([a, b])$. Allora il grafico di f può essere parametrizzato con la curva

$$\gamma(t) = (t, f(t)) \qquad t \in [a, b].$$

Quindi $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ e la lunghezza del grafico di f è data da

$$L = L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt.$$

Definizione (Riparametrizzazione)

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva e sia*

$$\varphi : [c,d] \to [a,b] \text{ una funzione biettiva derivabile}$$
$$\text{con inversa derivabile.}$$

La curva $r : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ *definita da*

$$r(s) = \gamma(\varphi(s)), \qquad s \in [c,d]$$

si dice **riparametrizzazione** *della curva* γ.

- φ *monot.* <u>*crescente*</u> $\Rightarrow$ r *è una riparametrizzazione* <u>*concorde*</u> *di* γ.
- φ *monot.* <u>*decrescente*</u> $\Rightarrow$ r *è una riparametrizzazione* <u>*discorde*</u> *di* γ.

Il sostegno di r coincide con il sostegno di γ.

Esempio

La nozione di lunghezza di una curva è invariante per riparametrizzazioni

Teorema

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva di classe* $C^1([a,b])$. *Sia* $r : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ *una sua riparametrizzazione. Allora*

$$L(r) = L(\gamma).$$

Dimostrazione: Per ipotesi esiste una funzione biettiva derivabile $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ tale che

$$r(s) = \gamma(\varphi(s)), \qquad s \in [c,d].$$

La lunghezza di r è data da

$$L(r) = \int_c^d \|r'(s)\| \, ds$$

Vi sono due possibilità:

Ascissa curvilinea per una curva regolare

Definizione

Data $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva regolare. Chiamiamo ascissa curvilinea di* γ *(o funzione lunghezza dell'arco)*

$$s : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ data da } s(t) := \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau, \ \ t \in [a, b]$$

- s è derivabile di $[a, b]$ con

Riparametrizzazione di γ rispetto alla lunghezza dell'arco

Riparametrizzazione di γ rispetto alla lunghezza dell'arco

Riparametrizzazione di γ rispetto alla lunghezza dell'arco

Teorema

Data $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva regolare e sia* $s : [a, b] \to [0, L]$ *la sua ascissa curvilinea, e sia* $r : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ *la riparametrizzazione di* γ *rispetto alla lunghezza dell'arco. Si ha*

$$\|r'(s)\| = 1 \quad \forall\, s \in (0, L)\,.$$

Ascissa curvilinea: parametro intrinseco della curva

$$\|r'(\sigma)\| = 1 \quad \forall \sigma \in (0, L) .$$

Quindi

$$\int_0^s \|r'(\sigma)\| \, d\sigma = s \quad \forall s \in [0, L]$$

e cioè, passando da $r(0) = \gamma(a)$ a $r(s)$, si percorre un cammino di lunghezza s.