Appunti sulle funzioni continue e sulla teoria dell'integrazione secondo Riemann

Analisi Matematica B

Riccarda Rossi

Università degli Studi di Brescia

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Capitolo 1

Proprietà globali delle funzioni continue

La definizione di continuità di una funzione in un punto, cosìcome quella di limite su cui è fondata, ha carattere locale: per controllare che una funzione sia continua in un certo punto è sufficiente conoscere quella funzione in un intorno, comunque piccolo, del punto considerato. Pertanto, di per se' la continuità può garantire solo la validità di proprietà *locali*, cioè che valgono nell'intorno del punto considerato: per esempio, si ricordi, a questo proposito, il Teorema di limitatezza locale.

In questo capitolo vogliamo esaminare i legami fra la continuità di una funzione e importanti proprietà *globali* di tale funzione (cioè che valgono su tutto il suo insieme di definizione). Sarà possibile stabilire tali legami combinando la continuità della funzione f considerata con

ipotesi di tipo 'topologico' su D_f: richiederemo che $D_f = I$, con
I intervallo generico;

quindi, I potrà in generale essere anche una semiretta, aperta o chiusa, o un intervallo aperto, o un intervallo semiaperto o chiuso. In casi specifici, richiederemo

$I = [a, b]$ sia intervallo chiuso e limitato.

1.1 Il teorema di Weierstrass

Definizione 1.1.1. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$. Un punto $x_m \in D_f$ viene detto* punto di minimo assoluto *per f se*

$$f(x_m) \leq f(x) \quad \forall\, x \in D_f\,, \tag{1.1.1}$$

e il corrispondente valore $f(x_m)$ viene detto valore di minimo assoluto *per f.*

Un punto $x_M \in D_f$ viene detto punto di massimo assoluto *per f se*

$$f(x_M) \geq f(x) \quad \forall\, x \in D_f\,, \tag{1.1.2}$$

e il corrispondente valore $f(x_M)$ viene detto valore di massimo assoluto *per f.*

Osserviamo che, di fatto,

$$f(x_m) = \min\{f(x)\,:\, x \in D_f\} = \min \operatorname{im}(f)\,, \qquad f(x_M) = \max\{f(x)\,:\, x \in D_f\} = \max \operatorname{im}(f)\,; \tag{1.1.3}$$

pertanto, oltre che con le espressioni di valore di minimo di massimo assoluto, ci riferiremo a $f(x_m)$ e a $f(x_M)$ come al minimo e al massimo di f (sul suo dominio D_f). Ribadiamo comunque la fondamentale differenza fra

$$x_m \rightsquigarrow \text{PUNTO di minimo assoluto} \qquad \text{e} \qquad f(x_m) \rightsquigarrow \text{VALORE di minimo assoluto}$$

(e idem per x_M e $f(x_M)$).

Per completezza, introduciamo anche

- l'*estremo superiore di* f, cioè l'estremo superiore dell'insieme immagine di f, ossia
$$\sup f = \sup \mathrm{im}(f) = \sup\{f(x) : \quad x \in D_f\};$$
- l'*estremo inferiore di* f, cioè l'estremo inferiore dell'insieme immagine di f, ossia
$$\inf f = \inf \mathrm{im}(f) = \inf\{f(x) : \quad x \in D_f\};$$

Segue dalla (1.1.3) e dall'unicità del massimo e del minimo di una funzione che i valori di massimo assoluto e di minimo assoluto, se esistono, sono univocamente determinati, mentre a priori una funzione potrebbe avere più punti di minimo (massimo) assoluto. Per esempio, la funzione $W : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ data da[1]

$$W(x) := \begin{cases} |x| & x \in [-1, 1]\,, \\ |x-2| & x \in (1, 3]\,, \end{cases}$$

ha in $[-1, 3]$ due punti di minimo assoluto (sono i punti $x_m^1 = 0$ e $x_m^2 = 2$, corrispondenti al valore di minimo assoluto $m = 0$) e tre punti di massimo assoluto (sono $x_M^1 = -1$, $x_M^2 = 1$, e $x_M^3 = 3$, corrispondenti al valore di massimo assoluto $M = 1$).

Ci chiediamo se, data una funzione $f : D_f \to \mathbb{R}$, essa ammette almeno un punto di minimo, e almeno un punto di massimo assoluto. Questo è in generale FALSO, come mostra il seguente

Esempio 1.1.2. Consideriamo le funzioni:

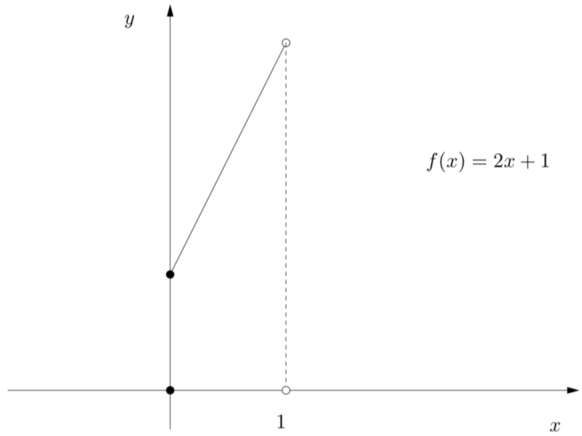
1. $f(x) := e^x$, ristretta all'intervallo $I = [0, +\infty)$. In questo caso si ha che $f(x) \geq f(0) = 1$ per ogni $x \geq 0$, quindi $x_m = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto per f su $[0, +\infty)$. Poiché $\mathrm{im}(f) = [1, +\infty)$, si ha che $\sup \mathrm{im}(f) = +\infty$ e quindi $\mathrm{im}(f)$ non ammette massimo. Pertanto f non ha alcun punto di massimo assoluto su I.

2. $f(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha che $\mathrm{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi $\inf(\mathrm{im}(f)) = 0 \notin \mathrm{im}(f)$. Pertanto $\mathrm{im}(f)$ non ammette minimo, quindi f non ha né massimo, né minimo assoluto su $\mathbb{R}$.

3. $f(x) = \tan(x)$, ristretta all'intervallo $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Poiché $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$, tan non ammette né un punto di minimo, né un punto di massimo assoluto.

4. $f(x) = 2x + 1$, ristretta a $[0, 1)$: vediamo che f ha un unico punto di minimo assoluto, $x_0 = 0$, ma non ammette alcun punto di massimo assoluto.

[1]**Esercizio!**: disegnarne il grafico!



Osserviamo tutte le funzioni in questione sono continue, e che nel primo e nel secondo esempio l'intervallo di definizione è illimitato, mentre nel terzo l'intervallo è limitato, ma aperto; nel quarto esempio l'intervallo di definizione è semiaperto. Diamo ora l'esempio di una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato, che però non ammette né minimo né massimo assoluto.

Esempio 1.1.3. Consideriamo la funzione $f : [0,3] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 2 & x = 0\,, \\ x & x \in (0,3)\,, \\ 1 & x = 3\,. \end{cases}$$

Disegnandone il grafico, osserviamo che f non ammette né un punto di minimo, né un punto di massimo assoluto. Notiamo che f non è continua in $[0,3]$: in effetti, f è continua su $(0,3)$, ma non è continua a sinistra in $x = 0$, e non è continua a destra in $x = 3$.

Tenendo conto degli esempi precedenti, congetturiamo che l'esistenza o meno di un punto di minimo/massimo assoluto dipenda sia da proprietà della funzione (che dovrà essere continua), sia da proprietà dell'intervallo di definizione, che dovrà essere **chiuso e limitato**. Ricordiamo che denoteremo il generico intervallo chiuso e limitato con $[a,b]$, a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Questo è quanto asserito dal

Teorema 1.1.4 (Weierstrass)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, f ha almeno un punto di minimo assoluto e almeno un punto di massimo assoluto in $[a,b]$, cioè*

$$\exists\, x_m \in [a,b]\,, \quad \exists\, x_M \in [a,b] \;: \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall\, x \in [a,b]\,. \tag{1.1.4}$$

Dimostrazione. Per fissare le idee, dimostreremo che

$$\exists\, x_M \in [a,b] \text{ punto di } \underline{\text{massimo}} \text{ per } f.$$

- **Passo 1:** Costruiamo una *successione massimizzante* per f su $[a,b]$, cioè una successione $\{x_n\} \subset [a,b]$ tale che
$$f(x_n) \to \sup_{[a,b]} f.$$
Nella costruzione distinguiamo due casi:
Caso 1: $\sup_{[a,b]} f < +\infty$. Possiamo ricorrere alla caratterizzazione del $\sup_{[a,b]} f$ (cioè il sup dell'insieme immagine di f):
  1. $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq \sup_{[a,b]} f$
  2. $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, x \in [a,b]\, :\, \sup_{[a,b]} f - \varepsilon < f(x)$.

In particolare, scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ con $n \geq 1$ troviamo un elemento $x_n \in [a,b]$ tale che

$$\sup_{[a,b]} f - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \sup_{[a,b]} f \,. \tag{1.1.5}$$

Al variare di n otteniamo quindi una successione $\{x_n\} \subset [a,b]$. Dalla (1.1.5) e dal Teorema dei due carabinieri segue che $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{[a,b]} f$.
Caso 2: $\sup_{[a,b]} f = +\infty$. Allora l'insieme immagine di f non è superiormente limitato, cioè non ammette alcun maggiorante. In altri termini,

$$\forall\, M > 0 \;\; \exists\, x \in [a,b] : \quad f(x) > M.$$

Scegliendo $M = n$, $n \in \mathbb{N}$, costruisco una successione $\{x_n\} \subset [a,b]$ tale che $\lim n \to \infty f(x_n) = +\infty = \sup_{[a,b]} f$.

- **Passo 2:** la successione $\{x_n\} \subset [a,b]$ è <u>limitata</u>, quindi per il teorema di Bolzano Weiestrass

$$\exists \text{ una sottosuccessione } \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \;\; \exists\, x \in \mathbb{R} : \;\; \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$

Notare che

$$a \leq x_{n_k} \leq b \quad \Rightarrow \quad a \leq x \leq b.$$

- **Passo 3:** Usiamo che f è continua: quindi, da $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ si ha che

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x).$$

D'altra parte, abbiamo visto che lungo *tutta* la successione $\{x_n\}$ si ha che $f(x_n) \to \sup_{[a,b]} f$ per $n \to \infty$: quindi, per il teorema sui limiti di sottosuccessioni, ho che anche lungo la sottosuccessione $\{f(x_{n_k})\}$ vale che $f(x_{n_k}) \to \sup_{[a,b]} f$ per $k \to \infty$. Allora, per l'unicità del limite delle sottosuccessioni concludiamo che

$$f(x) = \sup_{[a,b]} f \,.$$

Quindi $\sup_{[a,b]} f$ è un valore assunto dalla funzione f, cioè $\sup_{[a,b]} f \in \mathrm{im}(f)$. Quindi $\sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f$. Ribattezziamo il punto x come x_M: concludiamo quindi che

$$f(x_M) = \max_{[a,b]} f,$$

cioè x_M è un punto di massimo assoluto per f su $[a,b]$.

□

Vediamo subito un'immediata conseguenza del Teorema di Weierstrass.

Corollario 1.1.5. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è limitata su $[a,b]$, cioè*

$$\exists\, K > 0 : \quad -K \leq f(x) \leq K \quad \forall\, x \in [a,b] \,. \tag{1.1.6}$$

Si noti che la (1.1.6) è una proprietà di limitatezza *globale*: vale cioè su <u>tutto</u> l'intervallo $[a,b]$.
Dimostrazione. Dalla (1.1.4) segue che, essendo $m := f(x_m)$ e $M := f(x_M)$, $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$. Allora la (1.1.6) segue ponendo $K := \max\{|m|, |M|\}$. □

Per esempio, il Teorema 1.1.4 e il Corollario 1.1.5 garantiscono che la funzione[2]

$$f(x) := x^4 + \arctan\big(\sin(3x^2)\big) + \frac{x\cos(x)}{x^2+2} \quad \forall\, x \in D_f = \mathbb{R} \,,$$

[2] lo studio del suo grafico qualitativo potrebbe essere complesso.

è limitata ed ammette almeno un punto di minimo e almeno un punto di massimo assoluto su ogni intervallo del tipo $[a,b]$, con a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. In effetti, essa è continua (sul suo dominio, che è $\mathbb{R}$, quindi in particolare su $[a,b]$) in quanto data da somme/prodotti/quozienti/composizioni di funzioni continue. Allo stesso modo, la funzione

$$f(x) = \exp\left(x^3+1\right)\arctan(x) + \arcsin(\tan(x)),$$

definita su

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ |\tan(x)| \leq 1\right\} \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right] = \ldots \cup \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right] \cup \ldots \end{aligned}$$

è continua su D_f, in quanto data dalla somma/prodotto/composizione di funzioni continue. Quindi f ammette almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo assoluto su ogni intervallo (chiuso e limitato) della forma $\left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Osservazione 1.1.6. Osserviamo che il Teorema di Weierstrass garantisce **solo l'esistenza, e non l'unicità** dei punti di minimo/massimo assoluto. Per esempio, la funzione

$$f(x) := |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

ha sull'intervallo $[-1,1]$ un (unico) punto di minimo assoluto: $x_m = 0$, e due punti di massimo assoluto: $x_M^1 = 1$ e $x_M^2 = -1$. D'altra parte, la funzione $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1,0], \\ x & \text{se } x \in (0,1], \\ 1 & \text{se } x \in (1,2] \end{cases}$$

ha infiniti punti di minimo assoluto (tutti i punti dell'intervallo $[-1,0]$) e infiniti punti di massimo assoluto (tutti i punti dell'intervallo $[1,2]$).

Osservazione 1.1.7. Tutte le ipotesi del teorema sono necessarie: in altri termini, tralasciandone anche solo una, la tesi non vale. Invitiamo il lettore a tracciare il grafico delle funzioni presentate nei seguenti esempi.

- La funzione $f_1(x) = \frac{1}{x}$, che consideriamo sull'intervallo $I_1 = (0,1]$, è continua su I_1, ha in $x_m = 1$ un punto di minimo assoluto, ma non ammette alcun punto di massimo assoluto. Si noti però che I_1, pur essendo limitato, non è chiuso.

- La funzione $f_2(x) = x^2$ è continua su $I_2 = \mathbb{R}$, ha in $x_m = 0$ l'unico punto di minimo assoluto, ma non ammette punti di massimo assoluto. In effetti, I_2 non è limitato.

- La funzione $f : [0,2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & x \in [0,1)\,, \\ 1 & x = 1\,, \\ x-1 & x \in (1,2]\,, \end{cases}$$

  non ha né un punto di minimo né un punto di massimo assoluto su $[0,2]$. Si noti però che f è continua su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, mentre ha in 1 un punto di discontinuità di tipo salto. Quindi è sufficiente far cadere la continuità anche in un solo punto dell'intervallo di definizione, per rendere falsa la (1.1.4).

1.2 Il teorema di Bolzano (o degli zeri)

In questa sezione diamo risultati relativi alla risolubilità di equazioni legate a funzioni continue, si veda in particolare l'Esempio 1.2.4 più in avanti. Il 'capostipite' di tali risultati è il

Teorema 1.2.1 (Bolzano)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che*

$$f(a) \cdot f(b) < 0\,. \tag{1.2.1}$$

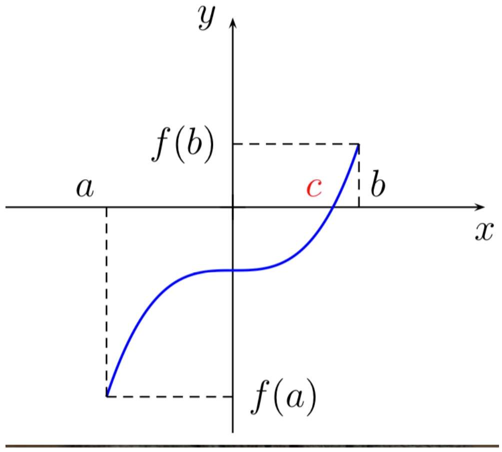
Allora

$$\exists\, x_0 \in (a, b) : \quad f(x_0) = 0\,. \tag{1.2.2}$$

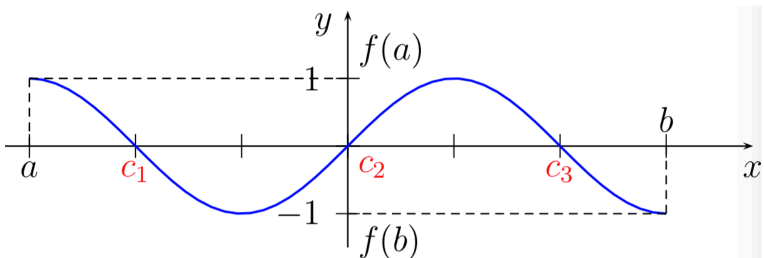
Il punto x_0 di annullamento di f viene anche detto zero di f*.*

Osservazione 1.2.2. - Notare che con la (1.2.1) stiamo richiedendo che, agli estremi dell'intervallo di definizione, f deve assumere valori discordi! Dalla (1.2.1) segue in particolare che $f(a) \neq 0$ e $f(b) \neq 0$: quindi lo zero x_0 di f "deve trovarsi" in (a, b).

- L'interpretazione geometrica è la seguente: se f assume valori discordi agli estremi di un intervallo, allora il suo grafico interseca l'asse dell'ascisse in almeno un punto (interno a tale intervallo).



- Il teorema di Bolzano garantisce **solo l'esistenza, e non l'unicità** dei punti di annullamento di f. Vediamo un esempio grafico



e alcuni esempi concreti:

– la funzione $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := x - 2$ per ogni $x \in [1, 3]$ ha in $x_0 = 2$ il suo unico zero.

– La funzione $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) := x^3 - x = x(x^2 - 1)$ per ogni $x \in [-2, 2]$ ha tre zeri: $x_0^1 = -1$, $x_0^2 = 0$, e $x_0^3 = 1$.

– La funzione $h : [0,3] \to \mathbb{R}$ definita da[3]

$$h(x) = \begin{cases} x-1 & x \in [0,1]\,, \\ 0 & x \in (1,2]\,, \\ x-2 & x \in (2,3]\,, \end{cases}$$

ha infiniti zeri (tutti i punti dell'intervallo $[1,2]$).

Tutte le ipotesi del teorema sono necessarie, come mostrano i seguenti controesempi:

Esempio 1.2.3. 1. La funzione $f_1 : [-2,1] \to \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 & -2 \le x < 0\,, \\ 1 & 0 \le x \le 1\,, \end{cases}$$

verifica la (1.2.1), ma non ammette alcun punto di annullamento. Si noti che f è continua su $[-2,1] \setminus \{0\}$. Quindi l'esistenza di un solo punto di discontinuità è sufficiente a far cadere la (1.2.2), cioè l'esistenza di uno zero,

2. Consideriamo la funzione $f_2(x) = e^{-x}$, con $x \in [-1,1]$. Si ha che $f_2 \in C^0([-1,1])$, ma f_2 non si annulla in nessun punto di $[-1,1]$. Notiamo che $f_2(-1) = e > 0$ e $f_2(1) = 1/e > 0$, quindi la (1.2.1) è violata.

Mostriamo ora un'applicazione del teorema di Bolzano alla localizzazione degli zeri di una funzione f continua; consideremo una particolare funzione continua, e cioè un polinomio. Gli zeri di tale polinomio sono quindi le soluzioni dell'associata equazione algebrica. Ecco quindi un esempio di **applicazione del Teorema degli zeri alla risoluzione di equazioni algebriche** (più precisamente, alla dimostrazione dell'esistenza di soluzioni di equazioni algebriche).

Come vedremo, l'idea alla base dei conti nell'Esempio 1.2.4 è che il Teorema 1.2.1 non viene applicato sull'intero dominio di definizione di f, ma alla restrizione di f a un sottointervallo (chiuso e limitato), agli estremi del quale è verificata la condizione (1.2.1).

Esempio 1.2.4 (Localizzazione degli zeri di un polinomio)**.** Dimostriamo che esiste una radice x_0 dell'equazione $x^4 - x - 2 = 0$ verificante $x_0 \in [1,2]$. A questo scopo, consideriamo la funzione polinomiale $P(x) := x^4 - x - 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: P è continua su $\mathbb{R}$ e $P(1) = -2$, mentre $P(2) = 12$. Quindi, grazie al Teorema 1.2.1 concludiamo che, di fatto, l'equazione ammette almeno una radice $x_0 \in (1,2)$.

Il teorema dei valori intermedi. È il corollario più significativo del Teorema di Bolzano.

Teorema 1.2.5 (Valori intermedi (I))**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, f assume almeno una volta ogni valore y compreso fra il suo valore m di minimo assoluto su $[a,b]$ e il suo valore M di massimo assoluto su $[a,b]$.*

Facciamo qualche commento su questo enunciato: ricordiamo che, grazie al Teorema di Weierstrass, poiché $f \in \mathrm{C}^0([a,b])$ esistono $x_m \in [a,b]$ e $x_M \in [a,b]$ tali che $m = f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) = M$ per ogni $x \in [a,b]$. In altri termini,

$$\mathrm{im}(f) \subset [m,M]\,. \tag{1.2.3}$$

Ora, il Teorema 1.2.5 afferma che, se $f \in \mathrm{C}^0([a,b])$, per ogni $y \in [m,M]$ esiste $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = y$. In altri termini, per ogni $y \in [m,M]$ si ha che $y \in \mathrm{im}(f)$, cioè vale

$$[m,M] \subset \mathrm{im}(f)\,. \tag{1.2.4}$$

Combinando la (1.2.3) e la (1.2.4), si conclude che $\mathrm{im}(f) = [m,M]$, cioè che **l'insieme immagine di f è un intervallo** (più precisamente, l'intervallo $[m,M]$).

In effetti, il Teorema dei valori intermedi si potrebbe anche enunciare in questa forma *alternativa*:

[3]**Esercizio!**: disegnarne il grafico!

Teorema 1.2.6 (Valori intermedi (II))**.** *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora,* $\mathrm{im}(f)$ *è un intervallo.*

L'interpretazione grafica di questo risultato è immediata: il grafico di una funzione continua su un intervallo non presenta interruzioni e può essere tracciato senza staccare la matita dal foglio.

Dimostrazione del Teorema 1.2.5. Siano $x_m \in [a, b]$ e $x_M \in [a, b]$ un punto di minimo e, rispettivamente, di massimo assoluto per f su $[a, b]$. Per fissare le idee, supponiamo che $x_m < x_M$. Dimostriamo che vale la (1.2.4), cioè che

$$\forall\, y \in (m, M) \ \ \exists\, x \in [a, b] : \quad y = f(x) \ \Leftrightarrow \ y - f(x) = 0. \tag{1.2.5}$$

(si noti che è sufficiente dimostrare che $(m, M) \subset \mathrm{im}(f)$ in quanto, essendo $m = f(x_m)$ e $M = f(x_M)$, chiaramente si ha che m, $M \in \mathrm{im}(f)$). Per dimostrare la (1.2.5), fissato $y \in (m, M)$ introduciamo la funzione

$$g_y : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{data da} \quad g_y(x) := y - f(x) \quad \text{ per ogni } x \in [a, b].$$

Osserviamo che g_y è continua, in quanto è data dalla differenza di una costante e di una funzione continua. Applichiamo il Teorema degli zeri alla restrizione di g_y all'intervallo $[x_m, x_M]$. Usando la (1.1.4), si vede subito che $g_y(x_m) = y - f(x_m) > 0$ e $g_y(x_M) = y - f(x_M) < 0$. Allora, grazie al Teorema 1.2.1 concludiamo che esiste $x \in (x_m, x_M)$ tale che $y = f(x)$. Ripetendo il ragionamento per ogni $y \in (m, M)$, concludiamo la (1.2.5). □

1.3 Inverse di funzioni continue

In questa sezione esamineremo il seguente

Problema: Sia

$$f : A \to \mathbb{R} \text{ continua in } A \text{ e iniettiva.}$$

Sappiamo quindi che f è invertibile su A, con funzione inversa

$$f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathbb{R}$$

(ricordiamo infatti che il dominio della funzione inversa è l'insieme immagine di f, e l'insieme immagine della funzione inversa è il dominio di f, e cioè A). Ci chiediamo se

$$\boxed{f^{-1} \text{ è continua in } \mathrm{im}(f)?} \tag{1.3.1}$$

Questo non è vero in generale, come dimostra il seguente

Esempio 1.3.1. Sia $A = [0, 1] \cup (2, 3]$ (unione di due intervalli) e sia $f : A \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{se } x \in (2, 3]. \end{cases}$$

Allora f è continua in A, con insieme immagine dato dall'intervallo $[0, 2]$. La sua inversa f^{-1} : $[0, 2] \to \mathbb{R}$ (con insieme immagine dato da $[0, 1] \cup (2, 3]$) è facilmente calcolabile: si tratta della funzione

$$f^{-1} : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x + 1 & \text{se } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Si noti che f^{-1} è discontinua in $x = 1$.

Anche nel contesto di questo problema, vedremo che sarà possibile dare una risposta affermativa alla (1.3.1) combinando l'ipotesi di continuità di f con l'ipotesi che il suo dominio sia un intervallo. Notiamo che il dominio della funzione dell'Esempio 1.3.1 non è un intervallo, in quanto è dato dall'unione di due intervalli disgiunti.

D'ora in poi considereremo solo funzioni continue definite su intervalli. In questo caso, abbiamo innanzitutto una caratterizzazione dell'invertibilità (di funzioni continue definite su intervalli): si ha invertibilità solo in corrispondenza a una proprietà di stretta monotonia. Diamo il seguente risultato senza dimostrazione.

Teorema 1.3.2 (Caratterizzazione delle funzioni continue invertibili)**.** Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su I. Allora

$$f \text{ è invertibile} \Longleftrightarrow f \text{ è strettamente monotona.}$$

Osservazione 1.3.3. L'ipotesi che I sia un intervallo è essenziale, infatti $f : [0,1] \cup (2,3] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x \in [0,1] \\ x & \text{se } x \in (2,3]. \end{cases}$$

è continua, invertibile ma non è monotona.

Ricordiamo che, se $f : D_f \to \mathbb{R}$ è strettamente monotona, allora la funzione inversa $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathbb{R}$ è ancora monotona, con una monotonia dello stesso tipo di f. Essa è anche continua (possiamo cioè dare una risposta affermativa alla (1.3.1))? Il seguente risultato, sempre senza dimostrazione, dà una risposta a questa domanda.

Teorema 1.3.4. *Siano*

- *I intervallo*

- *$f : I \to \mathbb{R}$ continua su I*

- *$f : I \to \mathbb{R}$ invertibile*

Allora $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathbb{R}$ è continua.

Capitolo 2

L'integrale di Riemann

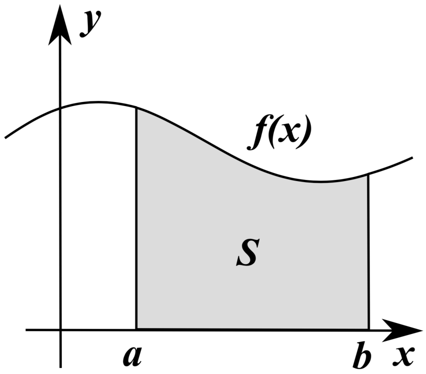
In questo Capitolo affrontiamo la teoria dell'integrale di Riemann. Il concetto di integrale, nato per la risoluzione di problemi geometrici, si è poi rivelato fondamentale anche per problemi di natura diversa, sicché è, ora, uno dei concetti più usati nella costruzione di modelli matematici. Ai fini di questo corso, comunque, verrà data una introduzione elementare alla teoria dell'integrazione, focalizzata sulla nozione di integrale formalizzata da Georg Riemann (esistono altre nozioni, più sofisticate, di integrale che esulano però dagli scopi del corso). Essenzialmente, affronteremo due tipologie di questioni:

1. Dare una definizione rigorosa alla nozione di funzione integrabile e di integrale secondo Riemann. A questo scopo,
   (a) dapprima presenteremo, in un contesto semplificato e in maniera intenzionalmente 'informale', le idee soggiacenti alla definizione di integrale di Riemann;
   (b) in seguito svilupperemo rigorosamente la costruzione dell'integrale di Riemann;
   (c) approfondiremo quindi lo studio della classe delle funzioni integrabili secondo Riemann, fornendo condizioni necessarie e sufficienti/condizioni sufficienti per tale proprietà;
   (d) fisseremo alcune proprietà della nozione di integrale.
2. Sviluppare tecniche di calcolo dell'integrale di Riemann. Tali tecniche sono basate sullo studio dei legami fra derivazione e integrazione. A questo proposito,
   (a) introdurremo il cosiddetto 'problema della primitiva' e studieremo le proprietà dell'integrale indefinito;
   (b) chiariremo i legami fra derivazione e integrazione tramite i due teoremi fondamentali del calcolo integrale;
   (c) acquisiremo opportune tecniche di calcolo degli integrali, basate sulle formule di integrazione per parti e per sostituzione;
   (d) affronteremo (parzialmente) il problema dell'integrazione delle funzioni razionali fratte.

2.1 Definizione di funzione integrabile e di integrale di Riemann

Il lettore ha sicuramente appreso le tecniche di calcolo dell'area di un rettangolo e, più in generale, di un poligono. Ci si pone ora il problema di calcolare aree di regioni piane con un contorno curvilineo. Confineremo la discussione a una specifica classe di regioni piane con bordo curvilineo, concentrandoci sul seguente

Problema 2.1.1. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e **positiva**: calcolare l'area A della regione di piano (detta* sottografico *di f) compresa tra il grafico di f e l'asse delle x.*



Evidenziamo che questo problema ha significato perché si sta supponendo che $f \geq 0$ sul suo dominio, cioè l'intervallo $[a,b]$. Diversamente, non avrebbe senso parlare di 'sottografico' di f. Ai fini di motivare la definizione di integrale secondo Riemann, che darà una risposta al Problema 2.1.1, e le costruzioni ad essa preliminari, discutiamo ora

Un procedimento di approssimazione dell'area del sottografico di f. Essenzialmente, l'idea è di approssimare l'area del sottografico di f, regione con bordo curvineo, tramite le aree di rettangoli (cf. la (2.1.1)), che siamo in grado di calcolare. A questo scopo, data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e **positiva**,

(1) Consideriamo una suddivisione $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ di $[a,b]$ (cf. la Definizione 2.1.2 più sotto)
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b, \qquad \text{con } I_j := [x_j, x_{j+1}], \quad j \in \{0, \ldots, n\}.$$
Sia A_j l'area di regione piana compresa fra il grafico della restrizione di f all'intervallo I_j e l'asse x.

(2) Poiché f è continua, se I_j è "sufficientemente piccolo", la variazione di f su I_j sarà "piccola": possiamo quindi trattare f *come se fosse* costante su I_j. Quindi un'approssimazione dell'area A_j è data da
$$A_j \sim f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$
con ξ_j un punto arbitrario di I_j (possiamo scegliere ξ_j arbitrariamente, visto che trattiamo f come se fosse costante su I_j). Si noti che
$$f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) \quad \text{è l'area del rettangolo con base } (x_{j+1} - x_j) \text{ e altezza } f(\xi_j). \tag{2.1.1}$$

(3) Allora, un'approssimazione dell'area A del sottografico di f sull'*intero* intervallo $[a,b]$ è data dalla somma delle approssimazioni delle aree A_j, cioè
$$A \sim \tilde{A} := \sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$
con ξ_j un punto arbitrario di I_j per ogni $j = 0, \ldots, n$. Ci si aspetta che all'aumentare dei punti di suddivisione di $[a,b]$, il valore $\tilde{A}$ sia un'approssimazione sempre migliore di A.

Ribadiamo che la discussione su esposta non fornisce la definizione di integrale di Riemann, ma serve al solo scopo di introdurre alcune delle idee ad essa soggiacenti. Daremo la definizione di integrale di Riemann dopo aver sviluppato una serie di costruzioni preliminari.

Verso la definizione di integrale di Riemann

Precisiamo innanzitutto l'**ipotesi di base** sulla funzione f per la quale introduciamo l'integrale di Riemann:

$$\boxed{f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \underline{\textbf{limitata,}}} \tag{2.1.2}$$

e cioè

$$\exists\, M \geq 0 : \quad \forall\, x \in [a, b] \quad -M \leq f(x) \leq M. \tag{2.1.3}$$

Sottolineiamo che

- non richiediamo più che f sia continua: tale ipotesi era stata fatta, precedentemente, solo per giustificare alcuni ragionamenti 'qualitativi' di cui non intendiamo avvalerci. Daremo quindi senso all'integrale per una classe di funzioni più ampia delle funzioni continue;
- non richiediamo più che f sia positiva: non ha quindi più senso parlare di sottografico di f e, come ribadiremo più volte, in generale si perde il significato geometrico del concetto di integrale. La nozione che ora introduciamo *trascende*, infatti, il problema originario (cioè il Problema 2.1.1) che ha motivato il suo sviluppo.

Sottolineiamo altresì che l'ipotesi che f sia **limitata** è irrinunciabile, essendo alla base delle costruzioni che ora vediamo.

Il primo passo verso la definizione di integrale di Riemann è la seguente

Definizione 2.1.2 (Suddivisione)**.** *1. Diciamo che* $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ *è una* **suddivisione** *di* $[a, b]$ *se*

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = b, \quad x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}.$$

Si ha $[a, b] = \bigcup_{j=0}^{n} I_j$ *con* $I_j = [x_j,\, x_{j+1}]$, $j \in \{0, \ldots, n\}$.

2. Date due suddivisioni D_1 *e* D_2 *di* $[a, b]$*, diciamo che* D_2 *è* più fine *di* D_1 *se tutti i punti di* D_1 *sono anche punti di* D_2*, cioè*

$$D_1 \subset D_2.$$

Osservazione 2.1.3. La relazione 'essere più fine', che di fatto si riduce a una relazione di inclusione fra insiemi, è chiaramente una relazione d'ordine. Inoltre, date due suddivisioni D_1 e D_2, ne esiste una più fine di entrambe: è sufficiente definire $D := D_1 \cup D_2$, e chiaramente si avrà che D è più fine di D_1 e di D_2.

Associamo a ogni suddivisione D di $[a, b]$ i seguenti oggetti:

Definizione 2.1.4 (Somme di Riemann)**.** *Sia* D *una suddivisione di* $[a, b]$*. Chiamiamo*

- somma di Riemann *di* f *relativa alla suddivisione* D *il numero*

$$\Sigma(f, D) = \sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) \quad \text{con } \xi_j \in [x_j, x_{j+1}] \text{ scelto arbitrariamente, per } j \in \{0, \ldots, n\};$$

- somma inferiore *associata a* f *e a* D *il numero*

$$\mathrm{s}(f, D) := \sum_{j=0}^{n} \left[\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j);$$

- somma superiore *associata a* f *e a* D *il numero*

$$\mathrm{S}(f, D) := \sum_{j=0}^{n} \left[\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j).$$

Sottolineiamo che queste definizioni hanno senso perché stiamo supponendo che f sia limitata su $[a,b]$: questo assicura, in particolare, che per ogni $j = 0,\ldots,n$ la restrizione di f a $[x_j, x_{j+1}]$ è inferiormente limitata, cioè

$$\inf_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x) > -\infty$$

(infatti, si ha $\inf_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x) \geq -M$, con M la costante data dalla (2.1.3)). Quindi, la somma inferiore $\mathrm{s}(f,D)$ è ben definita. Analogamente si vede che $\mathrm{S}(f,D)$ è ben definita.

Lemma 2.1.5. *Supponiamo che f soddisfi la* (2.1.2). *Allora, per ogni suddivisione D e per ogni somma di Riemann $\Sigma(f,D)$ si ha che*

$$\mathrm{s}(f,D) \leq \Sigma(f,D) \leq \mathrm{S}(f,D). \tag{2.1.4}$$

Dimostrazione. Sia $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = b\}$ una suddivisione di $[a,b]$. Per $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, fissiamo un punto $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$. Allora si ha

$$\inf_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x) \leq f(\xi_j) \leq \sup_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x) \tag{2.1.5}$$

La disuguaglianza (2.1.4) segue sommando (2.1.5) per $j \in \{0,\ldots,n\}$. □

Osservazione 2.1.6. Se $f \geq 0$ su $[a,b]$, allora $\mathrm{s}(f,D)$ e $\mathrm{S}(f,D)$ assumono un preciso significato geometrico, legato al concetto di *plurirettangolo*. Chiamiamo plurirettangolo un'unione finita di rettangoli, non sovrapposti, con lati paralleli agli assi x e y. Allora,

- $\mathrm{s}(f,D)$ è l'area del plurirettangolo dato dall'unione dei rettangoli dati dai prodotti cartesiani

  $$[x_j, x_{j+1}] \times [0, \inf_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)]$$

  (cioè, i rettangoli aventi come basi $(x_{j+1}-x_j)$ e altezze $\inf_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)$);
- $\mathrm{S}(f,D)$ è l'area del plurirettangolo dato dall'unione dei rettangoli dati dai prodotti cartesiani

  $$[x_j, x_{j+1}] \times [0, \sup_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)]$$

  (cioè, i rettangoli aventi come basi $(x_{j+1}-x_j)$ e altezze $\sup_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)$).

Sia A l'area del sottografico di f (che ha senso introdurre, perché siamo ritornati a supporre che $f \geq 0$). Allora per ogni suddivisione D si ha

$$\mathrm{s}(f,D) \leq A \leq \mathrm{S}(f,D). \tag{2.1.6}$$

Vediamo ora come variano somme inferiori e somme superiori al variare delle suddivisioni.

Lemma 2.1.7. *Sia $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ limitata e siano D_1, D_2 due suddivisioni di $[a,b]$.*

1. *Supponiamo ora che D_2 sia più fine di D_1, cioè $D_1 \subset D_2$. Allora*

   $$\begin{aligned} \mathrm{s}(f,D_1) &\leq \mathrm{s}(f,D_2) \\ \mathrm{S}(f,D_2) &\leq \mathrm{S}(f,D_1) \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

   Cioè, raffinando le suddivisioni di $[a,b]$ le somme inferiori crescono, mentre quelle superiori decrescono.

2. *Si ha che*

   $$\mathrm{s}(f,D_1) \leq \mathrm{S}(f,D_2) \qquad \text{per ogni coppia di suddivisioni } D_1 \text{ e } D_2 \text{ di } [a,b]. \tag{2.1.8}$$

Dimostrazione. Non dimostreremo la (2.1.7).

Abbiamo già giustificato la (2.1.8) nel caso particolare in cui $D_1 = D_2 = D$, cf. la (2.1.4)); si osservi che ora non stiamo supponendo che D_1 e D_2 siano ordinate (cioè che D_2 sia più fine di D_1!): comunque, le somme inferiori associate a D_1 sono sempre minori o uguali delle somme superiori associate a D_2. Per dimostrare la (2.1.8) ragioniamo in questo modo: sia $\widetilde{D}$ una suddivisione più fine di D_1 e di D_2 (per esempio, $\widetilde{D} := D_1 \cup D_2$). Allora,

$$\mathrm{s}(f, D_1) \overset{(1)}{\leq} \mathrm{s}(f, \widetilde{D}) \overset{(2)}{\leq} \mathrm{S}(f, \widetilde{D}) \overset{(3)}{\leq} \mathrm{S}(f, D_2),$$

dove la (1) segue dalla (2.1.7), la (2) dalla (2.1.4), la (3) ancora dalla (2.1.7). □

Osservazione 2.1.8 (Punto della situazione)**.** Ci aspettiamo che l'area del sottografico si ottenga 'prendendo il limite' (in un senso opportuno) delle somme inferiori $\mathrm{s}(f, D)$ e delle somme superiori $\mathrm{S}(f, D)$ al raffinarsi delle suddivisioni D.

Per le proprietà di monotonia (2.1.7), tenendo conto dei risultati sui limiti di funzioni (e successioni) monotone, ci aspettiamo che

$$\begin{aligned} &\text{“}\lim \mathrm{s}(f, D)\text{”} = \sup\{\text{somme inferiori, al variare delle suddivisioni}\} \\ &\text{“}\lim \mathrm{S}(f, D)\text{”} = \inf\{\text{somme superiori, al variare delle suddivisioni}\} \end{aligned}$$

Per formalizzare queste idee, introduciamo il sup delle somme inferiori e l'inf delle somme superiori.

Definizione 2.1.9. *Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, chiamiamo* **integrale inferiore** $\mathcal{I}'(f)$ *e* **integrale superiore** $\mathcal{I}''(f)$ *di f su $[a, b]$ i numeri*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'(f) &:= \sup_D \mathrm{s}(f, D) = \sup\big\{\mathrm{s}(f, D) : D \text{ suddivisione di } [a, b]\big\}, \\ \mathcal{I}''(f) &:= \inf_D \mathrm{S}(f, D) = \inf\big\{\mathrm{S}(f, D) : D \text{ suddivisione di } [a, b]\big\}. \end{aligned}$$

Lemma 2.1.10. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora,*

$$\mathcal{I}'(f),\ \mathcal{I}''(f) \in \mathbb{R}; \tag{2.1.9a}$$

$$\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}''(f). \tag{2.1.9b}$$

Dimostrazione. Poiché esiste $M > 0$ tale che $-M \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, si ha che

$$\begin{aligned} &-M(b-a) = -M\sum_{j=0}^{n}(x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=0}^{n}(-M)(x_{j+1} - x_j) \leq \sum_{j=0}^{n}\left[\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)\right](x_{j+1} - x_j) \\ &= \mathrm{s}(f, D) \leq \mathrm{S}(f, D) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\left[\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)\right](x_{j+1} - x_j) \leq \sum_{j=0}^{n} M(x_{j+1} - x_j) = M(b-a)\,. \end{aligned}$$

Da questo calcolo si deduce immediatamente che

$$-M(b-a) \leq \mathcal{I}'(f) \leq M(b-a), \qquad -M(b-a) \leq \mathcal{I}''(f) \leq M(b-a).$$

La (2.1.9b) segue dal fatto che

$$\mathrm{s}(f, D_1) \leq \mathrm{S}(f, D_2) \qquad \text{per ogni coppia di suddivisioni } D_1 \text{ e } D_2 \text{ di } [a, b].$$

Infatti, tenendo fisso D_1 e facendo variare D_2 (che è una suddivisione *arbitraria* di $[a, b]$), si ottiene che

$$\mathrm{s}(f, D_1) \leq \inf_{D_2} \mathrm{S}(f, D_2) \qquad \text{per ogni suddivisione } D_1 \text{ di } [a, b];$$

facendo ora variare D_1 si conclude che

$$\sup_{D_1} \mathrm{s}(f, D_1) \leq \inf_{D_2} \mathrm{S}(f, D_2),$$

da cui la (2.1.9b). $\square$

Siamo ora nella posizione di definire il concetto di funzione integrabile e di integrale secondo Riemann.

Definizione 2.1.11. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Diciamo che f è* **integrabile secondo Riemann** *su $[a, b]$ se integrale inferiore e superiore coincidono, cioè*

$$\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f).$$

In tal caso scriviamo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$$

e chiamiamo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **integrale di Riemann** *di f in $[a, b]$ (a e b si dicono* estremi di integrazione*).*

Quindi, l'integrale di Riemann è il valore comune fra $\mathcal{I}'(f)$ e $\mathcal{I}''(f)$. Il simbolo $\int$ con cui viene indicato l'integrale non è che la lettera S (che sta per 'somma') secondo un'antica grafia.

Interpretazione geometrica. Se $\boxed{f \geq 0}$ su $[a, b]$, allora l'integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ fornisce l'area del sottografico di f. Questa **interpretazione geometrica si perde se f cambia segno** su $[a, b]$!!

2.2 Classi di funzioni integrabili e proprietà dell'integrale

Il prossimo risultato fornisce una *caratterizzazione* della condizione di integrabilità.

Teorema 2.2.1 (Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, D_\varepsilon \text{ suddivisione di } [a, b] \text{ tale che } \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) - \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \leq \varepsilon. \tag{2.2.1}$$

Inoltre, per ogni somma di Riemann $\Sigma(f, D_\varepsilon)$ associata a D_ε si ha

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \Sigma(f, D_\varepsilon) \right| < \varepsilon. \tag{2.2.2}$$

Evidenziamo che, se D_ε è una suddivisione nelle condizioni della (2.2.1), allora *ogni* somma di Riemann $\Sigma(f, D_\varepsilon)$ ad essa associata approssima $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a meno di ε.
Dimostrazione Dimostriamo innanzitutto che (2.2.1) è equivalente all'integrabilità secondo Riemann.

1. Supponiamo che f sia integrabile, e quindi che $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$. Ricordiamo che $\mathcal{I}'(f)$ è il sup delle somme inferiori: per la caratterizzazione del sup con ε, applicata qui con $\frac{\varepsilon}{2}$, si ha che

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, D'_\varepsilon \text{ suddivisione di } [a, b] \text{ tale che } \quad \mathcal{I}'(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \mathrm{s}(f, D'_\varepsilon) \leq \mathcal{I}'(f). \tag{2.2.3}$$

Analogamente, ricordando che $\mathcal{I}''(f)$ è l'inf delle somme superiori e applicando la caratterizzazione di inf con ε, troviamo che

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, D''_\varepsilon \text{ suddivisione di } [a, b] \text{ tale che } \quad \mathcal{I}''(f) \leq \mathrm{S}(f, D''_\varepsilon) \leq \mathcal{I}''(f) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2.4}$$

Poniamo

$$D_\varepsilon := D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon.$$

Per costruzione, D_ε è più fine di entrambe le suddivisioni. Ricordando che, al raffinarsi delle suddivisioni, le somme inferiori crescono e quelle superiori decrescono, e che le somme superiori maggiorano quelle inferiori, si ha che

$$\mathrm{s}(f, D'_\varepsilon) \leq \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \leq \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) \leq \mathrm{S}(f, D''_\varepsilon).$$

Combiniamo questa disuguaglianza con le (2.2.3) & (2.2.4), ottenendo

$$\mathcal{I}'(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \mathrm{s}(f, D'_\varepsilon) \leq \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \leq \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) \leq \mathrm{S}(f, D''_\varepsilon) \leq \mathcal{I}''(f) + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.2.5}$$

Ora ricordiamo che $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Quindi dalla (2.2.5) segue che

$$0 \leq \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) - \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \leq \mathcal{I}''(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \Big(\mathcal{I}'(f) - \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = \varepsilon$$

da cui la (2.2.1).

2. Viceversa, supponiamo che valga la (2.2.1) e osserviamo che, essendo $\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}''(f)$, $\mathcal{I}'(f)$ il sup delle somme inferiori e $\mathcal{I}''(f)$ l'inf delle somme superiori, si ha che

$$0 \leq \mathcal{I}''(f) - \mathcal{I}'(f) \leq \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) - \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, concludiamo che $\mathcal{I}''(f) = \mathcal{I}'(f)$, da cui l'integrabilità secondo Riemann di f.

Infine, sia $\Sigma(f, D_\varepsilon)$ una generica somma di Riemann associata a una suddivisione D_ε nelle condizioni della (2.2.1). Osserviamo che

$$\Sigma(f, D_\varepsilon) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{\leq} \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) - \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \overset{(2)}{\leq} \varepsilon$$

dove per (1) abbiamo usato il fatto che, per construzione, $\Sigma(f, D_\varepsilon) \leq \mathrm{S}(f, D_\varepsilon)$, e inoltre il fatto che $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}'(f) = \sup\{\mathrm{s}(f, D)\}$, sicché $\mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ e quindi $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq -\mathrm{s}(f, D_\varepsilon)$. La disuguaglianza (2) segue dalla (2.2.1). Con ragionamenti del tutto analoghi che invitiamo il lettore a fare si vede che

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \Sigma(f, D_\varepsilon) \leq \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) - \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Otteniamo quindi che

$$-\varepsilon \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \Sigma(f, D_\varepsilon) \leq \varepsilon,$$

da cui la (2.2.2). □

Diamo ora un esempio di funzione **limitata ma non integrabile**.

Esempio 2.2.2 (La funzione di Dirichlet)**.** Consideriamo la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

detta *funzione di Dirichlet*. Si vede facilmente che per ogni suddivisione D di $[0,1]$ si ha che

$$\mathrm{s}(f, D) = \sum_{j=0}^{n} 0\,(x_{j+1} - x_j) = 0\,, \quad \mathrm{S}(f, D) = \sum_{j=0}^{n} 1\,(x_{j+1} - x_j) = 1$$

poiché l'inf di f su ciascun intervallino della suddivisione è 0, e il sup di f su ciascun intervallino della suddivisione è 1. Essendo D una suddivisione arbitraria di $[0,1]$, concludiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'(f) &= \sup\{\mathrm{s}(f,D)\ :\ D \text{ suddiv. di } [0,1]\} = \sup\{0\} = 0, \\ \mathcal{I}''(f) &= \inf\{\mathrm{S}(f,D)\ :\ D \text{ suddiv. di } [0,1]\} = \sup\{1\} = 1 \end{aligned}$$

sicché $0 = \mathcal{I}'(f) < \mathcal{I}''(f) = 1$ e f non è integrabile secondo Riemann.

Diamo ora delle **condizioni sufficienti per l'integrabilità** (e quindi individuiamo delle *classi di funzioni integrabili*):

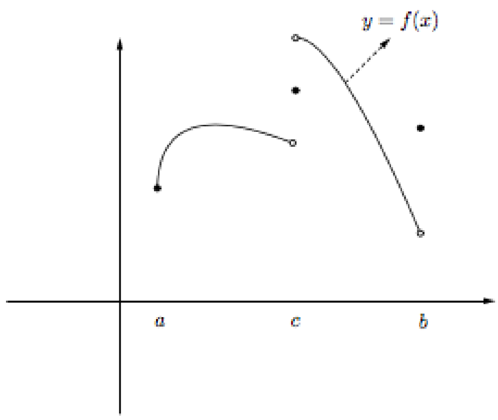
(1) Sono integrabili le funzioni **costanti** $f(x) \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$, e il valore del loro integrale di $[a,b]$ è

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a). \tag{2.2.6}$$

(2) Sono integrabili le funzioni **continue** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(3) Sono integrabili le funzioni **continue a tratti**. Ricordiamo che $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti se esiste una suddivisione $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ di $[a,b]$ tale che f è continua su ogni intervallo aperto (x_j, x_{j+1}) ed esistono finiti i limiti

$$\lim_{x\to x_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_{j+1}^-} f(x).$$



(4) Sono integrabili le funzioni **monotone**

(5) Sono integrabili le funzioni **limitate e monotone a tratti**.

Tutte queste condizioni sono **sufficienti**, non necessarie, per l'integrabilità.

Infine, raccogliamo nel prossimo risultato alcune proprietà dell'integrale di Riemann.

Proposizione 2.2.3 (Proprietà dell'integrale)**.** *Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili. Allora, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ le funzioni*

$$\begin{aligned} &f+g, \qquad \lambda f, \qquad |f| \ \textit{sono integrabili,} \\ &\forall\,[c,d] \subset [a,b] \quad f|_{[c,d]} \ \textit{è integrabile.} \end{aligned}$$

Inoltre:

(a) **Proprietà di linearità***: $\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$

(b) **Proprietà di confronto***: se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, si ha*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$

(c) **Proprietà di additività***: $\forall\, c \in]a,b[$*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

(d) **Confronto con il modulo***:*

$$\left|\int_a^b f(x)\right| \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Osservazione 2.2.4. 1. Osserviamo che la prima parte dell'enunciato garantisce che la combinazione lineare di funzioni integrabili è ancora integrabile, così come la restrizione e il modulo di una funzione integrabile sono anch'essi integrabili.

2. La proprietà di linearità (che può anche essere riformulata sinteticamente in questo modo: *l'integrale di una combinazione lineare di funzioni è la combinazione lineare degli integrali*) garantisce quindi che l'integrale della somma si spezza nella somma degli integrali, e che le costanti possono essere portate fuori dal simbolo di integrale.

3. Una conseguenza semplice, ma importante, della proprietà del confronto è che

$$(f \geq 0 \text{ su } [a,b]) \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0. \tag{2.2.7}$$

Il lettore deve tenere ben presente questo: non è possibile che l'integrale di una funzione positiva sia un numero negativo!

4. La proprietà di additività esprime il fatto, del tutto ovvio se si pensa all'interpretazione geometrica del concetto di integrale per funzioni positive, che per integrare f da a a b, posso interporre fra a e b un numero c, integrare da a a c, da c a b, e poi sommare i due risultati.

Il calcolo dell'integrale può semplificarsi in modo significativo se integro funzioni pari/dispari su *intervalli simmetrici rispetto all'origine.*

Proposizione 2.2.5 (Integrali e simmetrie)**.** *Sia*

$$f : [-a,a] \to \mathbb{R} \quad \textit{integrabile.}$$

- *Se f è una funzione* **pari** *– cioè $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in [-a,a]$ – allora*

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- *Se f è una funzione* **dispari** *– cioè $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in [-a,a]$ – si ha*

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Infine, anche in vista dei risultati teorici della Sezione 2.4, estendiamo la nozione di integrale al caso in cui l'intervallo di integrazione abbia estremi "invertiti" rispetto alla relazione d'ordine in $\mathbb{R}$.

Definizione 2.2.6 (Integrali orientati)**.** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabile e siamo* $\alpha, \beta \in [a,b]$ *con* $\alpha < \beta$. *Poniamo*

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad e \quad \int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.2.8}$$

Per esempio, $\int_5^3 x^2\,\mathrm{d}x = -\int_3^5 x^2\,\mathrm{d}x$. Evidenziamo inoltre che:

- Dalla formula $\int_\alpha^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ si evince che il valore di f in un singolo punto non influenza il risultato dell'integrale.

- Con la convenzione (2.2.8) abbiamo che si ha la formula di <u>additività</u>

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\gamma^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{per ogni } \alpha, \beta, \gamma \in [a,b].$$

  In particolare, sottolineiamo che non stiamo richiedendo che $\alpha < \gamma < \beta$.

La media integrale

Il lettore deve avere ben chiaro che la definizione di media integrale è data sotto la sola ipotesi che f sia integrabile.

Definizione 2.2.7 (Media integrale)**.** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una* <u>*funzione integrabile*</u>*. Chiamiamo* media integrale *di* f *su* $[a,b]$ *il valore*

$$M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il risultato che diamo ora, invece, necessita dell'ipotesi che f sia continua.

Teorema 2.2.8 (Teorema della media integrale)**.** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>*continua*</u>*. Allora esiste* $c \in [a,b]$ *tale che*

$$f(c) = M_f$$

cioè

$$\exists\, c \in [a,b] \ : \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass (cf. il Teorema 1.1.4), f assume su $[a,b]$ sia il valore di minimo assoluto m che il valore di massimo assoluto M. Quindi vale

$$m \le f(x) \le M \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Adesso integriamo le funzioni costantemente uguali a m e a M, e la funzione f, su $[a,b]$; dalla proprietà del confronto e dalla disuguaglianza sopra segue

$$m(b-a) \overset{(1)}{=} \int_a^b m\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,\mathrm{d}x \overset{(2)}{=} M(b-a).$$

dove le uguaglianze (1) e (2) sono dovute alla (2.2.6). Dividendo per $(b-a)$ si ottiene quindi che

$$m \le M_f \le M.$$

Visto che f è continua, possiamo applicare il Teorema dei valori intermedi (cf. il Teorema 1.2.5), e concludiamo che f assume tutti i valori tra m e M e quindi anche M_f. Quindi esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = M_f$. □

Il seguente esempio mostra che la condizione che f sia continua **non può essere omessa**.

Esempio 2.2.9. La funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1, \\ \\ 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ha media

$$M_f = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)\, dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 f(x)\, dx \right) = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2},$$

ma non esiste alcun punto $c \in [0, 2]$ tale che $f(c) = \frac{3}{2}$.

2.3 Primitive

Affrontiamo ora il problema del calcolo effettivo degli integrali che, come il lettore può facilmente immaginare, non può essere eseguito, in generale, tramite la definizione. Il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale che daremo nel seguito fornisce un procedimento operativo per il calcolo degli integrali. La sua dimostrazione è basata sul primo teorema fondamentale del calcolo integrale; entrambi i risultati chiariscono i legami fra le operazioni di integrazione e derivazione.

Prima di enunciare e dimostrare i due teoremi fondamentali del calcolo, introduciamo il concetto chiave di *primitiva* di una funzione. Ci occuperemo del seguente

Problema 2.3.1. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Data $f : I \to \mathbb{R}$, trovare una funzione $F : I \to \mathbb{R}$, derivabile, tale che*

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in I\,. \tag{2.3.1}$$

Chiamiamo primitiva *di f su I ogni funzione*

$$F : I \to \mathbb{R}, \qquad \textit{derivabile, verificante la } (2.3.1).$$

Osserviamo che il concetto di primitiva ha una chiara interpretazione geometrica: una primitiva F di f è una funzione tale che per ogni $x_0 \in I$ la tangente al grafico di F nel punto x_0 è la retta, passante per $(x_0, F(x_0))$, il cui coefficiente angolare è proprio pari a $f(x_0)$.

Esempio 2.3.2. La funzione

(1) $f(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$ ammette come primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $F(x) = x$; ma anche $\widetilde{F}(x) = x + 1$ è una primitiva di f.

(2) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ ammette come primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $F(x) = \frac{x^2}{2}$; ma anche $\widetilde{F}(x) = \frac{x^2}{2} + 13$ è una primitiva di f.

(3) $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ammette come primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $F(x) = \sin(x)$; ma anche $\widetilde{F}(x) = \sin(x) + 57$ è una primitiva di f.

Già da questi esempi si evince il seguente **fatto fondamentale**: data $f : I \to \mathbb{R}$, se f ammette una primitiva F su I, allora f ammette di fatto **infinite** primitive su I: si ha che

$$\forall\, c \in \mathbb{R} \text{ la funzione } x \in I \mapsto F(x) + c \text{ è una primitiva di } f.$$

Questo fatto ha una chiara controparte 'geometrica' tenendo conto del fatto che, per ogni $c \in \mathbb{R}$ il grafico della funzione $F + c$ si ottiene traslando verticalmente il grafico di F di c. Quindi il grafico di F e il grafico di $F + c$ hanno rette tangenti parallele, e cioè con lo stesso coefficiente angolare, dato dalla f.

Diamo ora la seguente

Definizione 2.3.3. *Data $f : I \to \mathbb{R}$, chiamiamo* integrale indefinito *di f (su I) l'insieme di tutte le primitive di f (su I), ammesso che ne esistano. Lo denotiamo con*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Deve essere chiaro al lettore che l'integrale indefinito non è un numero, è un insieme di funzioni!

Per l'integrale indefinito vale la proprietà di linearità:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

che va interpretata come un'uguaglianza fra insiemi di funzioni.

Ci occupiamo ora dello studio della struttura dell'insieme delle primitive. Abbiamo visto che, **se l'insieme delle primitive è non vuoto, esso contiene infinite funzioni**, in particolare tutte le funzioni del tipo

$$\{F + c \,:\, c \in \mathbb{R}\} \quad \text{con } F \text{ una particolare primitiva di } f.$$

Ci chiediamo se in questo modo **otteniamo tutte le primitive di f?**

- Questo è **VERO** se f **è definita su un intervallo**;
- Questo è **FALSO** se f **non è definita su un intervallo**,

come mostra il seguente

Esempio 2.3.4. La funzione

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ammette come primitive tutte le funzioni della forma

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + c_1 & \text{se } x < 0, \\ \frac{1}{x} + c_2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad (\text{con } c_1 \neq c_2, \text{ in generale}).$$

Si noti che f è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ che non è un intervallo.

Ritorniamo a funzioni **definite su intervalli**. Si ha il seguente risultato.

Proposizione 2.3.5. *Siano I un <u>intervallo</u>, $f : I \to \mathbb{R}$, e $F, \tilde{F} : I \to \mathbb{R}$ due primitive di f sull'intervallo I. Allora esiste*

$$\exists\, c \in \mathbb{R} \,:\, \quad \forall\, x \in I \quad \tilde{F}(x) = F(x) + c.$$

Dimostrazione: Introduciamo la funzione $H : I \to \mathbb{R}$ data da

$$H(x) := \tilde{F}(x) - F(x) \qquad \forall\, x \in I.$$

La funzione H è derivabile e verifica

$$H'(x) = \frac{d}{dx}(\tilde{F} - F)(x) = \tilde{F}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0\,.$$

Il teorema della derivata nulla, che si applica perché H è definita su un intervallo, assicura che H è costante, cioè

$$\exists\, c \in \mathbb{R} \,:\, \forall\, x \in I \qquad H(x) = c.$$

Siccome $H = \tilde{F} - F$, concludiamo che

$$\tilde{F}(x) - F(x) = c \qquad \forall\, x \in I.$$

Quindi

$$\tilde{F}(x) = F(x) + c \qquad \forall\, x \in I.$$

□

Corollario 2.3.6 (Teorema si struttura degli integrali indefiniti)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e supponiamo che essa ammetta una primitiva F. Allora l'integrale indefinito di f è dato da*

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \{F + c\ :\ c \in \mathbb{R}\}\ .$$

Esempio 2.3.7. Una primitiva di $f(x) = x^2$ è $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Quindi

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c$$

Il lettore noti che sarebbe sbagliato scrivere

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}$$

perché l'integrale indefinito è un insieme di infinite funzioni.

Osservazione 2.3.8. Il calcolo di un integrale indefinito fornisce come risultato un insieme di (infinite) funzioni. Per selezionare <u>una sola</u> fra tutte le primitive di una assegnata f, è sufficiente imporre che, in un dato punto x_0, la primitiva assuma un assegnato valore y_0. Si ottiene così un *problema di Cauchy*, sul quale ritorneremo nel Capitolo 15.

Concludiamo questa sezione con una tabella degli

Integrali indefiniti di alcune funzioni elementari

$$\forall\, r \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \qquad \int x^r\ \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c\,,$$

$$\int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \ln(|x|) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \int \sin(\alpha x)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \int \cos(\alpha x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \int \frac{1}{\cos^2(\alpha x)}\ \mathrm{d}x = \int \left(1 + \tan^2(\alpha x)\right)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\tan(\alpha x) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \int e^{\alpha x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \int \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\arctan(\alpha x) + c$$

2.4 Legami fra derivazione e integrazione: i teoremi fondamentali del calcolo integrale

Con il Corollario 2.3.6 abbiamo caratterizzato la struttura dell'insieme delle primitive di una data f, ma non abbiamo ancora dato una risposta alla seguente domanda:

sotto quali condizioni una data funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo aperto, ammette una primitiva F?

(dopodiché, se ne ammette una ne ammette infinite). Si noti che questa non è una domanda oziosa, come dimostra il seguente

Esempio 2.4.1. La funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

è integrabile in quanto continua a tratti, ma **non ammette alcuna** primitiva: in altri termini, non esiste alcuna funzione derivabile $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tale che

$$F'(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Infatti, se F soddisfa (2.4.1), allora si ha

$$F'_+(0) = 1, \qquad F'_-(0) = -1.$$

e quindi F non è derivabile in $x = 0$.

Il **primo teorema fondamentale del calcolo** fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza di una primitiva: infatti, esso garantisce che, se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua su I, allora f ammette (infinite) primitive su I. Ad esso premettiamo la seguente

Definizione 2.4.2. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Chiamiamo* funzione integrale *di f la funzione $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$A(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{per ogni } x \in [a, b],$$

con $c \in [a, b]$ fissato.

Osservazione 2.4.3.

1. La funzione integrale si ottiene calcolando l'integrale di f sull'intervallo $[c, x]$ (se $x > c$; diversamente, si ricorre all'*integrale orientato* della Definizione 2.2.6): si osservi che l'integrale è ben definito in quanto f, essendo integrabile su $[a, b]$, è pure integrabile su $[c, x]$.

2. Nella definizione di A, la variabile indipendente x compare nel secondo estremo di integrazione, mentre il primo estremo è fisso.

3. Scriveremo

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ ma anche } \int_c^x f(s)\,\mathrm{d}s, \quad \int_c^x f(r)\,\mathrm{d}r, \quad \int_c^x f(z)\,\mathrm{d}z;$$

in effetti, la variabile di integrazione è *muta*, non ha cioè un significato sostanziale né compare nel risultato finale dell'integrale. È però vietato scrivere $\int_c^x f(x)\,\mathrm{d}x$!

Diamo ora il

Teorema 2.4.4 (Primo teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$, $c \in [a, b]$ e $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale*

$$A(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Allora A è derivabile per ogni $x \in (a, b)$, e si ha

$$A'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a, b).$$

Dimostrazione. Poiché f è continua su $[a,b]$, f è anche integrabile. Quindi la funzione integrale A è ben definita. Vedremo che la continuità di f entrerà in gioco anche in altri punti della dimostrazione.

Si deve provare che

1. $\forall\, x_0 \in (a,b)$, la funzione A è derivabile, con
2. $A'(x_0) = f(x_0)$.

Fissiamo $x_0 \in (a,b)$ e calcoliamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h}$$

Si ha che

$$\begin{aligned} A(x_0+h) - A(x_0) &= \int_c^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(1)}{=} \int_c^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ove (1) segue dalla proprietà di additività dell'integrale. Si ha quindi

$$\frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Distinguiamo ora due casi:

- **Caso 1:** Se $h > 0$,

  $$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  è la media integrale di f sull'intervallo $[x_0, x_0+h]$. Poiché f è continua, possiamo applicare il teorema della media integrale e dedurre che

  $$\exists\, \xi_h \in [x_0, x_0+h] \quad \text{tale che} \quad \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi_h).$$

- **Caso 2:** Se $h < 0$, si ha $x_0 + h < x_0$ e

  $$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  Ora osserviamo che

  $$-\frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x_0 - (x_0+h)}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  è la media di f su $[x_0+h, x_0]$. Ancora per il teorema della media integrale,

  $$\exists\, \xi_h \in [x_0+h, x_0] \quad \text{tale che} \quad \frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi_h).$$

In conclusione, $\exists\, \xi_h$ tale che

$$\frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} = f(\xi_h) \qquad \text{con} \begin{cases} \xi_h \in [x_0, x_0+h] & \text{se } h > 0, \\ \xi_h \in [x_0+h, x_0] & \text{se } h < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h)$$

e

$$\lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x_0)$$

perché, per $h \to 0$, si ha che $\xi_h \to x_0$, e la funzione f è continua in x_0 (si ricordi il Teorema sulla caratterizzazione della continuità tramite il limite di funzioni). Abbiamo quindi dimostrato che

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} = f(x_0) \qquad \forall\, x_0 \in (a,b).$$

□

Corollario 2.4.5. *Le funzioni continue f su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ ammettono sempre una primitiva.*

Tutte e sole le primitive di f si ottengono aggiungendo una costante arbitraria a

$$A(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

dove c è un elemento di I: quindi

processo di integrazione $\Rightarrow$ primitive di una funzione continua

Con il prossimo risultato andremo a stabilire, in un certo senso, l'implicazione inversa con il prossimo risultato.

Teorema 2.4.6 (Il secondo teorema fondamentale del calcolo)**.** *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora per ogni $a, b \in I$ si ha*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f.

Useremo la notazione $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$ e quindi scriveremo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b}$$

Questo risultato si può sintetizzare con l'implicazione

primitive di una funzione continua $\Rightarrow$ calcolo di integrali

Dimostrazione. Dal primo teorema fondamentale del calcolo integrale (che possiamo applicare perché f è una funzione continua) si ha che la funzione integrale $A : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $A(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è una primitiva di f. Sia ora F una qualsiasi altra primitiva di f. Dal Corollario 2.3.6 segue che A e F differiscono per una costante, quindi

$$\exists\, c \in \mathbb{R} \;\; \forall\, x \in [a,b] \; : \; F(x) = A(x) + c.$$

In particolare, sostituendo $x = a$ deduciamo che

$$F(a) = A(a) + c = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + c = 0 + c = c,$$

e quindi

$$F(x) = A(x) + c = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + F(a) \qquad \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Sostituendo $x = b$ si ottiene la tesi. □

2.5 Integrazione per parti

Entriamo ora nel vivo del calcolo di integrali una prima importante tecnica, l'integrazione per parti.

Teorema 2.5.1 (Formula di integrazione per parti)**.** *Siano f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivata continua (cioè, f, $g \in \mathrm{C}^1((a,b))$). Allora*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.5.1}$$

Dimostrazione. Dalla formula di Leibniz per il calcolo della derivata della funzione prodotto si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \forall\, x \in (a,b).$$

Integrando entrambi i membri si ottiene

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b\,,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal secondo teorema fondamentale del calcolo. Abbiamo quindi dedotto la (2.5.1). □

Vi è una versione della (2.5.1) per gli integrali indefiniti:

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Osservazione 2.5.2.

- La (2.5.1) riconduce il calcolo dell'integrale $\int_a^b f'g\,\mathrm{d}x$ al calcolo dell'integrale $\int_a^b fg'\,\mathrm{d}x$ (la derivata è stata "scaricata" dalla f alla g). L'idea è che si dovrebbe passare dall'"integrale difficile" $\int_a^b f'g\,\mathrm{d}x$ all'integrale "più semplice" $\int_a^b fg'\,\mathrm{d}x$.
- Operativamente, si può applicare la formula (2.5.1) al calcolo dell'integrale del prodotto di due funzioni h e k

  $$\int_a^b h(x)k(x)\,\mathrm{d}x$$

  scegliendo in modo opportuno quale, fra h e k, dovrà giocare il ruolo di f', e quale delle due avrà il ruolo di g. Se, per esempio, scegliamo di trattare h come f', denotando con H una (qualsiasi) primitiva di h troviamo che

  $$\int_a^b h(x)k(x)\,\mathrm{d}x = H(x)k(x) - \int_a^b H(x)k'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

  Per riportarci all'integrale di destra, abbiamo quindi derivato la k e integrato la h.
- Per applicare in modo efficace la formula di integrazione per parti all'integrale di un prodotto di due funzioni, è quindi di fondamentale importanza scegliere bene quale delle due funzioni derivare e quale integrare. Nei seguenti esempi, illustriamo questa tecnica in alcuni casi.

Miscellanea di integrali per parti

Prodotto di un polinomio per una funzione trigonometrica. *Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sin(\alpha x), \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè ***integriamo la funzione trigonometrica e deriviamo il polinomio****.*
Ad esempio

$$\int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x \stackrel{i.p.}{=} -\int 1\frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x\sin(2x) = \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) + c$$

(il simbolo $\stackrel{i.p}{=}$ significa che l'uguaglianza è stata ottenuta applicando la formula di integrazione per parti). Il seguente esempio mostra che può essere necessario applicare l'integrazione per parti ripetutamente:

$$\int x^3\sin(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{i.p.}{=} -x^3\cos(x) + 3\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Per calcolare l'ultimo integrale, applico la formula (2.5.1):

$$\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{i.p.}{=} x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

e infine

$$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{i.p.}{=} \int \cos(x)\,\mathrm{d}x - x\cos(x) = \sin(x) - x\cos(x) + c\,.$$

Allora concludo

$$\int x^3\sin(x)\,\mathrm{d}x = -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) - 6\sin(x) + 6x\cos(x) + c\,.$$

Prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale. *Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow e^{\alpha x}, \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè ***integriamo la funzione esponenziale e deriviamo il polinomio****.*
Ad esempio

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x \stackrel{i.p.}{=} -\int 1e^x\,\mathrm{d}x + xe^x = (x-1)e^x + c\,.$$

Prodotto di un polinomio per una funzione logaritmica. *Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)\ln(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \ln(\alpha x), \end{cases}$$

cioè ***integriamo il polinomio e deriviamo la funzione logaritmica****.*
Ad esempio

$$\int x\ln(2x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\ln(2x) = -\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\ln(2x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln(2x) + c\,.$$

Troviamo quindi che

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\ln(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + x\ln(x) = -x + x\ln(x) + c\,.$$

Prodotto di un polinomio per l'arcotangente. *Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione* <u>*polinomiale*</u> *e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)\arctan(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \arctan(\alpha x), \end{cases}$$

cioè ***integriamo il polinomio e deriviamo la funzione arcotangente****.*
Ad esempio

$$\int x\arctan(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\arctan(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\arctan(x)\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale ragiono in questo modo

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x - \arctan(x) + c\,.$$

2.6 Integrazione per sostituzione

Iniziamo a dare una versione della formula di integrazione per sostituzione per gli integrali indefiniti.

Proposizione 2.6.1 (Formula di integrazione per sostituzione per gli integrali indefiniti)**.** *Siano f, $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivata continua. Allora*

$$\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + c\,. \tag{2.6.1}$$

Dimostrazione. La formula per il calcolo della derivata della funzione composta fornisce

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x) \qquad \forall\, x \in (a, b).$$

Calcolando l'integrale indefinito di entrambi i membri e osservando che

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \circ g)(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + c\,,$$

ottengo (2.6.1). □

Come conseguenza immediata della (2.5.1), otteniamo le seguenti formule

$$\forall\, r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad \int g(x)^r g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{g(x)^{r+1}}{r+1} + c\,, \tag{2.6.2a}$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|g(x)|) + c\,, \tag{2.6.2b}$$

$$\int \sin(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(g(x)) + c\,, \tag{2.6.2c}$$

$$\int \cos(g(x))\,\mathrm{d}x = \sin(g(x)) + c\,, \tag{2.6.2d}$$

$$\int \frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\left(1+\tan^2(g(x))\right)\,\mathrm{d}x = \tan(g(x)) + c\,, \tag{2.6.2e}$$

$$\int g'(x)e^{g(x)}\,\mathrm{d}x = e^{g(x)} + c\,, \tag{2.6.2f}$$

$$\int \frac{g'(x)}{1+g(x)^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(g(x)) + c\,. \tag{2.6.2g}$$

Esempio 2.6.2. Calcoliamo

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x$$

combinando la tecnica di integrazione per parti con la tecnica di integrazione per sostituzione. Integrando per parti, otteniamo

$$\int \arctan(x)\ \mathrm{d}x = \int 1 \arctan(x)\ \mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int x\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x + x\arctan(x)\,.$$

Per calcolare il secondo integrale indefinito $\int x\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$ procediamo per sostituzione, ponendo $u = x^2$. Allora $\mathrm{d}u = 2x\ \mathrm{d}x$, quindi

$$\int x\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln(|1+u|) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\,.$$

Concludiamo che

$$\int \arctan(x)\ \mathrm{d}x = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\,.$$

Diamo ora la formula di integrazione per sostituzione per gli integrali definiti.

Proposizione 2.6.3. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $x = \varphi(t)$ un cambiamento di variabile tale che*

$$\varphi : I \to \mathbb{R} \text{ è invertibile e derivabile con } \varphi' \text{ continua: } \varphi \in \mathrm{C}^1(I).$$

Allora

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Dimostrazione. Sia F una primitiva di f. Quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Per l'ipotesi la funzione $F(\varphi(t))$ è derivabile e vale

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (F(\varphi(t)))'\,\mathrm{d}t = F(\varphi(\varphi^{-1}(b))) - F(\varphi(\varphi^{-1}(a))) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

Analizziamo la struttura della formula:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

Formalmente, si ha che

$$\begin{array}{lcl} f(x) & \rightsquigarrow & f(\varphi(t)) \\ \mathrm{d}x & \rightsquigarrow & \varphi'(t)\ \mathrm{d}t \\ \int_a^b & \rightsquigarrow & \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \end{array}$$

Miscellanea di integrali per sostituzione

Esempio 2.6.4. Per calcolare

$$I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$$

effettuo una sostituzione basata sulla *formula parametrica*

$$\sin(x) = 2\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \tag{2.6.3}$$

che segue dalla formula

$$\frac{1}{2}\sin(2x) = \sin(x)\cos(x) = \frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}.$$

Quindi

$$I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x$$

Effettuo la sostituzione

$$\begin{cases} t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) & \Rightarrow \quad x = 2\arctan(t) \\ x = \frac{\pi}{3} & \Rightarrow \quad t = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow \quad t = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{cases}$$

Quindi

$$I = \int_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(3)$$

Esempio 2.6.5. Per calcolare

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

ricordo che

$$\sin^2(t)+\cos^2(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-\sin^2(t)} = |\cos(t)|\,.$$

Ponendo

$$x = \sin(t)\,,$$

si <u>elimina la radice</u>, poiché $\sqrt{1-x^2} \leftrightarrow |cos(t)|$ (il segno di $\cos(t)$ dipende dall'intervallo di integrazione). Si ha quindi

$$\begin{cases} x = \sin(t) \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin(x) \\ x = 0 \;\Rightarrow\; t = 0 \\ x = 1 \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi}{2} \\ \mathrm{d}x = \cos(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

N.B.: $\cos \geq 0$ su $[0, \pi/2] \;\Rightarrow\; \sqrt{1-x^2} \leftrightarrow \cos(t)$. Quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Esempio 2.6.6.

$$I = \int_0^{\sqrt{3}/4} \sqrt{1-4x^2}\,\mathrm{d}x$$

Per "eliminare" $\sqrt{1-(2x)^2}$, conviene porre

$$2x = \sin(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \arcsin(2x)$$

da cui

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos(t)\mathrm{d}t \\ x = 0 \;\Rightarrow\; t = 0, \\ x = \frac{\sqrt{3}}{4} \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

N.B.: $\cos > 0\,\text{su}\,[0, \pi/3] \;\Rightarrow\; \sqrt{1-4x^2} \leftrightarrow \cos(t)$.

Quindi

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \ldots = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Esempio 2.6.7.

$$I = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Si ha

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+\sinh^2(t)} = \cosh(t)$$

(N.B.: $\cosh > 0$ su $\mathbb{R}$!) Ponendo

$$x = \sinh(t)\,,$$

si <u>elimina la radice</u>. Calcoliamo l'integrale indefinito (da cui naturalmente seguirà il calcolo di I)

$$I = \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

con le sostituzioni

$$\begin{cases} x = \sinh(t) \\ \mathrm{d}x = \cosh(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

Quindi

$$I = \int \cosh(t)\cosh(t)\,\mathrm{d}t$$

Integrando per parti si ha

$$\int \overbrace{\cosh(t)}^{f'}\overbrace{\cosh(t)}^{g}\,\mathrm{d}t = \sinh(t)\cosh(t) - \int \overbrace{\sinh^2(t)}^{\cosh^2(t)-1}\,\mathrm{d}t$$

da cui

$$\int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{t+\sinh(t)\cosh(t)}{2} + c$$

Essendo $\boxed{t = \sinh^{-1}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})}$ e $\cosh(t) = \sqrt{x^2+1}$,

$$\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + c$$

2.7 *Appunti operativi:* integrazione delle funzioni razionali fratte

Caso generale

Consideriamo l'integrale (indefinito o definito)

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x$$

ove $N(x)$, $D(x)$ polinomi a coefficienti reali.

Supponiamo grado$(N) \geq$ grado(D). Per esempio:

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1}, \quad f_2(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad f_3(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

Dividiamo $N(x)$ per $D(x)$, cioè scriviamo

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \quad \text{con}$$

$Q(x)$ polinomio quoziente,

$R(x)$ polinomio resto, grado$(R) <$ grado(D).

Allora

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int \overbrace{Q(x)}^{\textit{polimomio!}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x$$

e grado$(R) <$ grado(D)!

Per esempio

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}\,,$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = x - \ln(|x+1|) + c$$

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}\,,$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x - \arctan(x) + c$$

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}\,,$$
$$\Downarrow$$
$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x - \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

Integrazione di funzioni con numeratore di grado inferiore del denominatore D'ora in poi confiniamo la discussione all'integrazione di funzioni
$$\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x$$
ove $R(x)$, $D(x)$ polinomi a coefficienti reali e
$$\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(D)$$

Tre casi:

- $\mathrm{gr}(D) = 1$
- $\mathrm{gr}(D) = 2$
- $\mathrm{gr}(D) > 2$

Caso I: $\mathrm{gr}(D) = 1$

Si ha
$$\begin{aligned} \mathrm{gr}(D) = 1 \quad &\Rightarrow \quad D(x) = ax+b,\ a \neq 0 \\ \mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(D) \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{gr}(R) = 0 \\ &\Rightarrow \quad R(x) = k\,. \end{aligned}$$

Quindi
$$\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{k}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{k}{a}\int \frac{a}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{k}{a}\ln\left(|ax+b|\right) + c$$

Per esempio
$$\int \frac{3}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(|2x-1|\right) + c$$

Caso II: $\mathrm{gr}(D) = 2$

Allora
$$\begin{aligned} &D(x) = ax^2+bx+c,\ a \neq 0 \\ &\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(D) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{gr}(R) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad R(x) = \alpha x + \beta\,. \end{aligned}$$

Consideriamo il discriminante
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Tre casi:

1. $\Delta > 0$
2. $\Delta = 0$
3. $\Delta < 0$

Caso II (1): $\mathrm{gr}(D) = 2$ & $\Delta > 0$

Allora

$$D(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
$$x_1,\ x_2 \text{ radici reali distinte di } D(x) = 0$$

Allora, esistono A, $B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

e quindi

$$\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x - x_1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{x - x_2}\,\mathrm{d}x = A\ln(|x - x_1|) + B\ln(|x - x_2|) + c$$

Per esempio

$$\frac{2}{x^2 + 5x + 4} = \frac{2}{(x + 4)(x + 1)} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x + 1}\,,$$

e trovo A e B facendo denominatore comune:

$$A(x + 1) + B(x + 4) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (A + B)x = 0 \\ A + 4B = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -B \\ 3B = 2 \end{cases}$$

Quindi

$$\int \frac{2}{x^2 + 5x + 4}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\int \frac{1}{x + 4}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln\left(|x + 1|\right) - \frac{2}{3}\ln\left(|x + 4|\right) + c$$

Per esempio

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3x + 1}{(x - 2)(x - 3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x - 2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{x - 3}\,\mathrm{d}x\,,$$

e trovo A e B facendo denominatore comune:

$$A(x - 3) + B(x - 2) = 3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (A + B)x = 3x \\ -3A - 2B = 1 \end{cases}$$

Quindi $B = 10$ e $A = -7$ e

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x = -7\int \frac{1}{x - 2}\,\mathrm{d}x + 10\int \frac{1}{x - 3}\,\mathrm{d}x = -7\ln\left(|x - 2|\right) + 10\ln\left(|x - 3|\right) + c$$

Caso II (2): $\mathrm{gr}(D) = 2$ & $\Delta = 0$

Allora

$$D(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$
$$D(x) = 0 \text{ ha due radici reali coincidenti}$$

<u>Due casi:</u>

- $\mathrm{gr}(R) = 0$
- $\mathrm{gr}(R) = 1$

– Se $\mathrm{gr}(R) = 0$, allora $R(x) = k$ e

$$\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{k}{a(x-x_1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{k}{a}\int (x-x_1)^{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{k}{a}(x-x_1)^{-1} + c$$

– Se $\mathrm{gr}(R) = 1$, allora $R(x) = \alpha x + \beta$, con $\alpha \geq 0$. Due metodi:

1. Scompongo nella somma di due frazioni:

$$\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\alpha x + \beta}{a(x-x_1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x-x_1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{(x-x_1)^2}\,\mathrm{d}x$$

   Ad esempio

$$\frac{x+2}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} \;\Leftrightarrow\; A(x-2) + B = x+2$$

   Quindi $A = 1$, $B = 4$ e

$$\int \frac{x+2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-2)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{4}{(x-2)^2} = \ln(|x-2|) - 4\frac{1}{x-2} + c$$

2. evidenzio al numeratore la derivata del denominatore, con manipolazioni algebriche.
   Ad esempio

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{(x-2)^2} &= \frac{x+2}{x^2-4x+4} \qquad \begin{cases}(x^2-4x+4)' \\ = 2x-4\end{cases} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2x+4-4+4}{x^2-4x+4} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(2x-4)+8}{x^2-4x+4}\end{aligned}$$

   Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+4) - 4\frac{1}{x-2} + c = \ln(|x-2|) - 4\frac{1}{x-2} + c\end{aligned}$$

Caso II (3): $\mathrm{gr}(D) = 2$ & $\Delta < 0$

Allora D ha due radici complesse coniugate, quindi non si fattorizza nel prodotto di due polinomi reali di grado 1.
Per esempio $D(x) = x^2 + x + 1$.
Calcolo

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

Primo passo: evidenzio al numeratore la derivata del denominatore ($(x^2+x+1)' = 2x+1$).

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+1-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Secondo passo: per calcolare

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

evidenzio al denominatore la somma di 1 e il quadrato di un binomio (in modo da riportarmi a $\sim (\arctan)'$).

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+x+\frac14-\frac14+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\frac34+\left(x+\frac12\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{\frac34\left(1+\frac43\left(x+\frac12\right)^2\right)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac43 \int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt3}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac43\frac{\sqrt3}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt3}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt3}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\sqrt3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt3}\right)+c\end{aligned}$$

Quindi

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac12\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt3}\right)+c$$

Caso III: $\mathrm{gr}(D) > 2$

Allora D si fattorizza nel prodotto di

- fattori di primo grado
- fattori irriducibili di secondo grado

Per esempio

$$\begin{aligned}&x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)\\ &x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)\\ &x^3-2x^3=x^2(x-2)\\ &x^4+2x^3+2x^2+1=(x+1)^2(x^2+1)\end{aligned}$$

– Per calcolare

$$\int R(x)/D(x)\,\mathrm{d}x$$

scomponiamo $R(x)/D(x)$ nella somma di frazioni ("fratti semplici") aventi come denominatori i fattori di D. Per la ricerca dei numeratori, si tiene conto della molteplicità dei fattori in cui è scomposto D.
Per esempio

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

facendo denominatore comune, trovo

$$1 = Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C$$

$$\Rightarrow \begin{cases}A+B=0\\ A+C-B=0\\ A-C=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-B\\ C=2B=-2A\\ A+2A=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}B=-\frac13\\ C=-\frac23\\ A=\frac13\end{cases}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

Per calcolare il secondo, evidenzio al numeratore la derivata del denominatore ($= 2x+1$)

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c\end{aligned}$$

Per esempio, calcolo

$$I = \int \frac{1}{x^2(x^2+3)}\,\mathrm{d}x$$

N.B.: il fattore x ha molteplicità 2.
Cerco A, B, C, $D \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

Facendo denominatore comune, trovo

$$\begin{aligned}1 =&\ Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)x^2 \\ 1 =&\ Ax^3 + 3Ax + Bx^2 + 3B + Cx^3 + Dx^2\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 3A=0 \\ 3B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{3} \\ A=0 \\ D=-\frac{1}{3} \\ C=0 \end{cases}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+3)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$$

Calcolo

$$\int \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$