

Esercizi su calcolo di derivate, e studio della differenziabilità

1. Calcolare le derivate parziali di

$$f(x, y) = \sin(x) + xy \quad \text{in } (\pi, 1)$$

2. Sia

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y).$$

Calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2).$$

3. Data

$$f(x, y) = (x + y)^3 + \cos(\pi y),$$

calcolare $\nabla f(1, 1)$.

4. Data

$$f(x, y, z) = \arctan(x + 2y + z^2)$$

calcolare $\nabla f(1, 2, 2)$.

5. Data

$$f(x, y) = (x + y)^2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

calcolare

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 2) \quad \text{con } \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) [= 6] \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) [= 6] \end{cases}$$

6. Determinare il piano tangente al grafico di $f(x, y) = xy e^{x^2 y}$, nel punto $(1, 1, e)$.

7. Data

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

calcolare $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 1)$ per $v = \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{i}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{i}_2$ e $v = \frac{2}{\sqrt{29}} \vec{i}_1 + \frac{5}{\sqrt{29}} \vec{i}_2$.

8. Sia $v = \frac{2}{\sqrt{13}} \vec{i}_1 + \frac{3}{\sqrt{13}} \vec{i}_2 + 0 \vec{i}_3$. Calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 0, 1), \quad \text{con } f(x, y, z) = x + 2z^2.$$

9. Data

$$f(x, y) = |x|(x + y)$$

calcolare $\nabla f(0, 0)$.

10. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ per $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \begin{cases} ye^y + x & \text{se } |y| > x^2, \\ x^2 + \ln(1 + \arctan(y^2)) & \text{se } |y| \leq x^2. \end{cases}$$

11. Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x) + y & \text{se } y > 2x, \\ \alpha x + \sin(y) & \text{se } y \leq 2x \end{cases}$$

ammetta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

12. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{se } |y| \geq x^2, \\ 3x - y + \beta & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, indicando gli eventuali valori del parametro β per i quali una delle derivate non esiste.

13. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \begin{cases} x + (y - x)^2 & \text{se } xy \geq 0, \\ x^2 + 2y + y^3 & \text{se } xy < 0. \end{cases}$$

Calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0), \quad \text{con } \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

14. Data

$$f(x, y) = e^{|x|}(|y| + x^2),$$

calcolare, se esistono, $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ con $v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$, e $\frac{\partial f}{\partial w}(1, 3)$ con $w = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

15. Siano $\alpha \geq 0$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x & \text{se } |y| \geq x^2 + \alpha, \\ y & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare al variare di α

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0), \quad \text{con } \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

16. Studiare la differenziabilità di

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

17. Studiare continuità e differenziabilità di

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

per

(a) $\alpha = 4/7$

(b) $\alpha = -2/5$

(c) $\alpha = 3/8$

18. Verificare se

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è differenziabile su \mathbb{R}^2 .

19. Data

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)(x + y)}{(x^2 + y^2)^{2\alpha+3}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

verificare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f_α è differ. in $(0, 0)$.

20. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(x^2 + 3y^2)^\alpha}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Al variare di α studiare la differenziabilità di f in $(0, 0)$.

21. Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali, e la differenziabilità di

$$f(x, y) = \begin{cases} |x|^{7\alpha} \log(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

al variare di $\alpha \geq 0$.