Esercizi su calcolo di derivate, e studio della differenziabilità

1. Calcolare le derivate parziali di
$$f(x,y) = \sin(x) + xy \ \text{ in } (\pi, 1)$$

2. Sia
$$f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y).$$
Calcolare
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2).$$

3. Data
$$f(x,y) = (x+y)^3 + \cos(\pi y),$$
calcolare $\nabla f(1,1)$.

4. Data
$$f(x,y,z) = \arctan(x + 2y + z^2)$$
calcolare $\nabla f(1,2,2)$.

5. Data
$$f(x,y) = (x+y)^2 \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$
calcolare
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,2) \ \text{ con } \mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)[=6] \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)[=6] \end{cases}$$

6. Determinare il piano tangente al grafico di $f(x,y) = xye^{x^2 y}$, nel punto $(1,1,e)$.

7. Data
$$f(x,y) = |x|(x+y)$$
calcolare $\nabla f(0,0)$.

8. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x,y) = \begin{cases} ye^y + x & \text{se } |y| > x^2, \\ x^2 + \ln(1 + \arctan(y^2)) & \text{se } |y| \le x^2. \end{cases}$$

9. Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che
$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x) + y & \text{se } y > 2x, \\ \alpha x + \sin(y) & \text{se } y \le 2x \end{cases}$$
ammetta
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

10. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } |y| \ge x^2, \\ 3x - y + \beta & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, indicando gli eventuali valori del parametro β per i quali una delle derivate non esiste.

11. Data
$$f(x,y) = x^2 + y^3$$
calcolare $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,1)$ per $v = \frac{1}{\sqrt{5}} \overrightarrow{i}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \overrightarrow{i}_2$ e $v = \frac{2}{\sqrt{29}} \overrightarrow{i}_1 + \frac{5}{\sqrt{29}} \overrightarrow{i}_2$.

12. Sia $v = \frac{2}{\sqrt{13}} \overrightarrow{i}_1 + \frac{3}{\sqrt{13}} \overrightarrow{i}_2 + 0 \overrightarrow{i}_3$. Calcolare
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,0,1), \qquad \text{con } f(x,y,z) = x + 2z^2.$$

13. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x,y) = \begin{cases} x + (y-x)^2 & \text{se } xy \geq 0, \\ x^2 + 2y + y^3 & \text{se } xy < 0. \end{cases}$$
Calcolare
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0), \quad \text{con } \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

14. Data
$$f(x,y) = e^{|x|}(|y| + x^2),$$
calcolare, se esistono, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ con $v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, e $\frac{\partial f}{\partial w}(1,3)$ con $w = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

15. Siano $\alpha \geq 0$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x,y) = \begin{cases} 6x & \text{se } |y| \geq x^2 + \alpha, \\ y & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Calcolare **al variare di** α
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0), \quad \text{con } \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

16. Studiare la differenziabilità di
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

17. Studiare continuità e differenziabilità di
$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^\alpha & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
per
   (a) $\alpha = 4/7$
   (b) $\alpha = -2/5$
   (c) $\alpha = 3/8$

18. Verificare se
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
è differenziabile su $\mathbb{R}^2$.

19. Data
$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x^2 + y^2)(x+y)}{(x^2 + y^2)^{2\alpha+3}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
verificare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f_α è differ. in $(0,0)$.

20. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{(x^2+3y^2)^\alpha}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Al variare di α studiare la differenziabilità di f in $(0,0)$.

21. Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali, e la differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^{7\alpha} \log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

al variare di $\alpha \geq 0$.