

Esercizi su equazioni lineari del prim'ordine a coefficienti continui

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^y \\ y(2) = 7. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} y'(x) = 10y(x) + e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} u'(x) + \frac{1}{x}u(x) = 2 \arctan(x) \\ u(1) = 3 \end{cases}$$

4. Data u tale che

$$\begin{cases} u' + \frac{1}{x}u = \sin(x) \\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

determinare

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{u(x)}{x} dx.$$

5.

$$\begin{cases} x^3 u'(x) + x^2 u(x) = 6 & \forall x > 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} y' = \sin(x) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

7. Data u tale che

$$\begin{cases} u'(t) + 2u(t) = \frac{t^2}{t^2+1} \\ u(0) = 3 \end{cases}$$

calcolare

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t).$$

8. Determinare il sup degli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la soluzione u di

$$\begin{cases} u' + u = e^{\alpha x} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

soddisfi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} u(x) = 0.$$